TÉCNICA

REVISTA DE ENGENHARIA, DOS ALUNOS DO I.S.T.

91

MARÇO

1938

"LUSALITE"

fibro-cimento nacional

INCOMBUSTÍVEL
LEVE
RESISTENTE
ISOLADOR
IMPUTRESCÍVEL

EM

Tubos para pressões hidráulicas de 3 a 12 K.os/cm.2
Chapas onduladas para coberturas
Chapas lisas para revestimento de tetos, tabiques, etc.
Produtos da Sociedade Portuguesa de Fibro-cimento

ÚNICOS CONCESSIONÁRIOS:

CORPORAÇÃO MERCANTIL PORTUGUESA, L.da

Rua de S. Nicolau, 123

Telefones: 2 3948 — 2 8941 — **LISBOA** — Telegramas: **Lusalite**

CIMENTO TEJO

FÁBRICA EM ALHANDRA

A instalação mais moderna do País. Dois fornos rotativos em laboração. — O "CIMENTO TEJO" marca pelas suas altas resistências e regularidade, garantidas pela fiscalização contínua de tôdas as fases do fabrico, exercida por técnicos portugueses especializados.

Pedidos à Companhia "CIMENTO TEJO"

SEDE EM LISBOA
RUA DA VITÓRIA, 88, 2.º

FILIAL NO NORTE
AV. DOS ALIADOS, 20, 3.º
PORTO

NÚMERO
91
Março — 1938

TÉCNICA

REVISTA DE ENGENHARIA
DOS
ALUNOS DO INSTITUTO SUPERIOR TÉCNICO
Redacção e Administração: AV. ROVISCO PAIS, IST / LISBOA-N. / TEL. 49144 (linha 50)

DIRECTOR
LUÍS GUIMARÃIS LOBATO
ADMINISTRADOR
F. BURNAY DE MENDONÇA
BIBLIOTECÁRIO
PEDRO ARSÉNIO NUNES
CORPO REDACTORIAL
JOSÉ M. P. ATHAYDE
JOSÉ MANUEL FIGUEIRA
ISABEL GAGO

NÚMERO AVULSO..... 5$00

ASSINATURAS:

	3 N.os	6 N.os	12 N.os
Continente e Ilhas	12$00	23$00	44$00
Colónias Portuguesas e Espanha...	—	30$00	55$00
Estrangeiro...	—	40$00	70$00

EDITOR E PROPRIETÁRIO
ASS. DOS ALUNOS DO I. S. T.

COMPOSTO E IMPRESSO
NAS
OFICINAS FERNANDES
RUA CRUZ DOS POIAIS, 103
TELEFONE 2 7784 // LISBOA

SUMÁRIO

		Págs.
O nivelamento geométrico do Canal do Tejo	Eng.º Civil (E. M.) Amílcar de Melo	461
Estructura da Luz — Hipótese dos Quanta — Métodos de Estatística	António da Silveira (Prof. de Física Geral e Experimental do I. S. T.)	477
Do Mundo Técnico		521
Notas Bibliográficas		526
Publicações recebidas		527

PERMITIDAS AS TRANSCRIÇÕES QUE INDIQUEM:
"TECNICA,,
REVISTA DE ENGENHARIA, DOS ALUNOS DO I. S. T.

FUNDAÇÕES GARANTIDAS

Um processo especial
para cada caso

Eng. Ricardo E. Teixeira Duarte

Captações de águas

Consolidações do solo

Sondagens geológicas

PROJECTO E EXECUÇÃO DE TODAS AS FUNDAÇÕES DE RESPONSABILIDADE FEITAS
ÚLTIMAMENTE EM LISBOA

EMPRÊSA DE SONDAGENS E FUNDAÇÕES, L.DA

Rua Augusta, 280, 3.º e 4.º — LISBOA

T. S. F.

LOUÇAS SANITÁRIAS
MATERIAL ELÉCTRICO
ENCANAMENTOS
BALNEÁRIOS
AQUECIMENTO CENTRAL
VENTILAÇÃO
ILUMINAÇÃO
CAMPAINHAS
TELEFONES
PÁRA-RAIOS
FRIGORÍFICOS «COPELAND»
ELEVADORES «STIGLER»

T. S. F.

Fundição de metais — Torneiras — Serralharia civil e artística—Latoaria—Galvanoplastia, etc.

Júlio Gomes Ferreira & C.ª, L.da

(CASA FUNDADA EM 1823)

A MAIS ANTIGA NO SEU GÉNERO

Estabelecimentos { Rua da Vitória, 82-88
Rua Aurea, 166-170 — LISBOA

Fábrica: Rua S. Tiago, 19

Telefones 21361 P. B. X.

VENDAS A PRESTAÇÕES

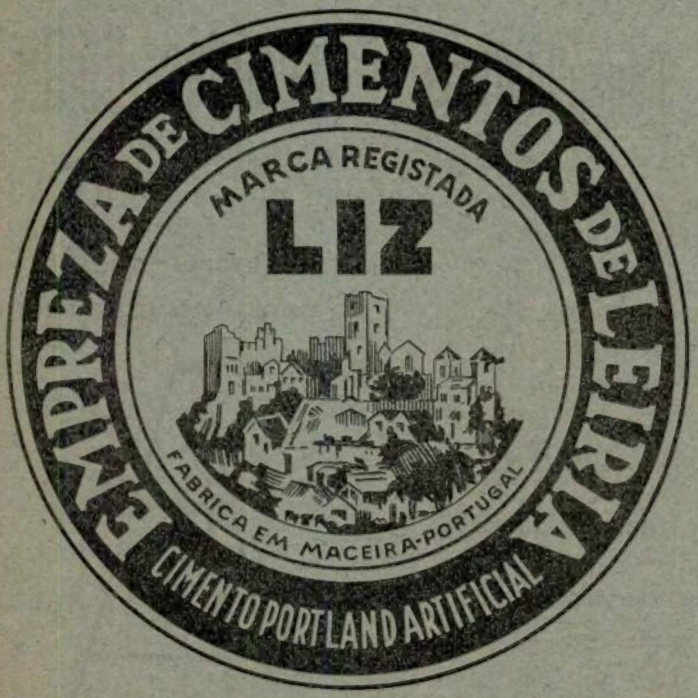
EMULSÕES

de asfalto para estradas

Todos os tipos e percentagens

TELEFONE 20879
Telegramas: Epalda — LISBOA

FÁBRICA EM SACAVÉM



Barricas de 180 kilos

Sacos de juta de 50 kilos

Sacos de papel de 50 kilos

Sede: Rua do Caes de Santarem, 64, 1.º — LISBOA
Filial do Norte: Rua Formosa, 297, 1.º — PORTO

AGÊNCIAS EM TODO O PAÍS

União Eléctrica Portugueza, S. A.

SEDE SOCIAL

Rua Duque de Loulé, 240 — PORTO

CAPITAL { Acções ..... 40:000 contos
Obrigações 30:500 contos

ELECTRICIDADE DO LINDOSO

FORÇA { Hidráulica ..... 40:000 HP
Térmica ..... 20:000 HP

Potência já contratada 20:000 HP
Potência disponível ... 22:000 HP

Extensão total das linhas em exploração: 1:000 quilómetros

A **U. E. P.** tem as melhores tarifas e concede as maiores facilidades para electrificação de fábricas e para abastecimento de rêdes de distribuïção nos Distritos de: **Viana do Castelo, Braga, Pôrto, Aveiro, Coimbra, Vizeu e Leiria.**

Consultai a U. E. P.

CIMENTO

SECIL

Experimentem a nova embalagem em sacos de papel, absolutamente segura, impermeável e sem devolução

Delegação em Lisboa: R. DO COMERCIO, 56, 3.º

Endereço telegráfico: SECIL-Lisboa
TELEFONES: 2 8201, 2 8202 e 6 1852

FÁBRICA EM OUTÃO (SETÚBAL)

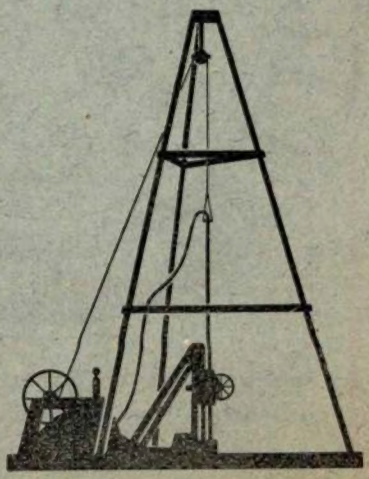
Azeitão 404 Setúbal 283

Sondages. Etanchements. Consolidations "Procédés Ródio"

Sondagens geológicas
Estudo da resistência e permeabilidade de terrenos; laboratório geofísico
Consolidação e impermeabilisação de terrenos e alvenarias por meio de injecções de cimento, produtos químicos, emulsão betuminosa Shellperm, etc.
Estacas de beton armado, sistema **Ródio** sem fazer trepidar o solo
Rebocos comprimidos por «cement gun»
Fundações em terrenos difíceis por congelação artificial, ou baixando o nível da agua friática.

Sociedade Anónima com séde em PARIS

As melhores referências no paiz e no estrangeiro



Engenheiro delegado para Portugal

Walter Weyermann

P. do Município, 32-2.º--LISBOA Tel. 2 8685

TÉCNICA

LUIZ DE GUIMARÃES LOBATO
DIRECTOR

ANO XIII - N.º 91 MARÇO 1938

O nivelamento geométrico do Canal do Tejo

PELO ENG. CIVIL (E. M.) AMILCAR DE MELO

CAPÍTULO I

O canal do Tejo e seus nivelamentos

1) — As condições das obras

A Obra do Canal do Tejo executada pela Companhia das Águas de Lisboa por empreitada geral da firma Waldemar J. d'Orey destina-se à ampliação do abastecimento de águas à Cidade de Lisboa, nos termos do contrato entre a Companhia e o Govêrno, de 31 de Dezembro de 1932.

O canal é um tubo circular de cimento armado de 2,50 m. de diâmetro interior que se estende, no primeiro trôço construído entre a Quinta da Marquesa, no Carregado, e a Quinta da Ché, aos Olivais, numa extensão de 32.990 metros.

A perda de carga, ou inclinação do fundo do canal livre é de 0,0001, isto é, 10 cm. em cada km. Nas depressões extensas e profundas, o canal é substituído por uma conduta sob pressão — *um sifão;* é êste constituído por dois tubos circulares de 1,44 m. de diâmetro interior e a perda de carga por metro de tubo eleva-se a 0,0008, isto é, 8 vezes maior que a do canal livre.

Destina-se o Canal a transportar, quando a altura de água fôr de 1,875 m. (o que corresponde à secção de vazão sob velocidade máxima), um caudal de 2,515 mc. por segundo e com 2,33 m. de altura, (a que corresponde a secção da máxima vazão), um caudal de 2,980 mc. por segundo ou sejam 257.430 mc. por dia.

Os 32.990 m. do Canal, repartem-se por várias obras com as seguintes extensões:

Canal livre em trincheira	23.986 m.
» » » túnel	5.289 »
» » » ponte-canal ou «a cavaleiro»	515 »
Canalização sob pressão ou sifão	3.200 »
Total.....	32.990 »

A ponte-canal ou canal a cavaleiro destina-se a atravessar as ravinas estreitas e de profundidade máxima até 10 metros. É o próprio canal, convenientemente armado e reforçado junto dos apoios, para resistir às flexões longitudinal e transversal, sob o efeito do esfôrço transvérso, que se suporta, à água e às sobrecargas; atingem os vãos um máximo de 13 metros. Os apoios são constituídos por pórticos ou cavaletes munidos de sapata de distribuïção de pressões.

As diferentes obras receberam cada uma um número para facilidade de serviço. Existiam assim 54 trincheiras, 25 túneis, 19 cavaleiros e 10 sifões; ao todo 98 obras diferentes. A maior trincheira entre a Várzea da Silveira e a Aldeia ao Sobralinho, media 2.302 m.; o maior túnel: o de Moscavide, 1.276 m. O sifão mais comprido, no Vale de

Alhandra tem 642 m. e a pressão máxima é de 25 metros. O maior cavaleiro, o da Quinta do Paraízo, próximo de Vila Franca, mede 65 m.

As cotas extremas do Canal, neste trôço, são respectivamente 24,840 m. e 18,650 m. acima do nível do mar em Cascais. Esta diferença de nível 6,19 m. reparte-se da seguinte maneira: 2,979 m. correspondem ao canal livre e 3,211 m. aos sifões. Dêstes há um: o de Sacavém, que por virtude da obra especial da sua conhecida ponte-sifão absorveu uma diferença de nível maior que a que corresponde aos outros.

Com uma perda de carga tão pequena e porque era necessário atacar ao mesmo tempo muitas das 98 obras diferentes, (que deviam estar entregues num prazo de 2 anos), numa dispersão de mais de 30 kms. tivemos de tomar com a implantação, quer em planimetria, quer em altimetria principalmente, excepcionais cuidados.

Dêste encargo fomos incumbidos pela Repartição Técnica da Companhia das Águas de Lisboa, e dos processos seguidos e trabalhos executados, daremos um relato tão sucinto quanto possível, com o fim de aliviar de tão árdua tarefa, quem, como nós, venha a ter análoga incumbência. Compilámos e reünimos aqui, ensinamentos e conselhos dispersos por muitas fontes de informação.

O nivelamento das Obras pertencia, em face do caderno de encargos, ao adjudicatário, que disporia da assistência técnica da fiscalização. A responsabilidade da sua condução e da sua exactidão pertenciam ao signatário.

Eramos nós que deveríamos verificar o nivelamento, e a melhor maneira de verificar um nivelamento é executá-lo.

O nivelamento de apoio da obra seria de precisão: assim estabelecia o caderno de encargos. E como um tal nivelamento se compõe de duas operações efectuadas em sentidos contrários, directa e inversa, estabelecemos que o adjudicatário executaria uma das operações e nós a outra.

2) — A tolerância fixada

A diferença entre os valores obtidos para uma determinada diferença de nível entre as duas operações directa e inversa chama-se êrro de fecho ou fecho. O valor mais provável daquela diferença de nível é a média daqueles dois valores. A grandeza do fecho depende da sensibilidade do instrumento, dos cuidados tomados na operação e da extensão a nivelar.

Se para medirmos uma grandeza X a decompuzermos em n partes e se medirmos estas com a mesma precisão, o êrro médio quadrático cometido na determinação de X, é igual ao êrro médio quadrático relativo a uma medida simples, multiplicado por $\sqrt{n}$.

No caso de duas determinações simples, como é costume fazer, o êrro médio coïncide com o êrro médio quadrático e tem por valor metade do fecho, como adiante veremos.

Fixámos como limite do êrro médio da determinação da diferença de nível de dois pontos situados à distância dum quilómetro 2 mm. O êrro médio da diferença de nível entre duas marcas situadas à distância K expressa em km,. determinada pela soma algébrica das diferenças de nível relativas a troços de 1 km., tem por limite, então: $e_{mm} = \pm 2 \text{ mm} \sqrt{K}$.

O objectivo a atingir com uma tão apertada tolerância não tinha em vista nivelar o fundo do Canal com tal rigor, mas o poder determinar com a maior plausibilidade, qual o êrro efectivo que num dado ponto afectasse a construção.

Com estes apertados limites tem a maior importância a fixidez e estabilidade dos pontos a que as cotas venham referidas; do mesmo modo interessa em especial ter superfícies muito lisas para a elas referir as cotas. Num dos parágrafos seguintes voltaremos mais detidamente a êste assunto.

A tolerância imposta no nivelamento das mestras das construções foi $\pm$ 5 mm., e nas fundações do Canal livre, quer em trincheira, quer em túnel, $\pm$ 15 mm.

3) — Os elementos de que dispunha a C. A. L.

A Companhia dispunha duma carta à escala 1:2500 com curvas de nível de 2,5 m. de eqüidistância, abrangendo uma faixa limitada até ao Carregado pela estrada nacional e pelo Canal do Alviela.

O levantamento desta carta foi efectuado

em 1933 pelo Instituto Geográfico e Cadastral, por autorização ministerial de 16 de Fevereiro de 1933 — inserta no *Diário do Govêrno*, I Série, n.º 38, da mesma data.

A carta segue para além do Carregado até à Quinta da Chantra, próximo de Alcanhões, ou seja, uns 6 km. a montante de Santarém, onde terá de se levar o canal quando se pretenderem captar grandes caudais que só o rio Tejo poderá fornecer. É na margem dêste que estava prevista a toma de água, na proximidade da Quinta da Boa Vista, resultado dum estudo exaustivo dos distintíssimos autores do projecto de 1908, Ex.mos Srs. Engenheiros João Severo Cunha e João Augusto Veiga da Cunha.

Aquela carta teve por base uma poligonal de precisão que seguiu o traçado mais conveniente à celeridade dos trabalhos, sem preocupações de seguir o traçado previsto para o canal em primeira tentativa.

Os vértices desta poligonal eram estacas de 5 × 5 × 60 e marcos de betão armado de 16 × 16 × 65 com uma pequena sapata. Em tôda a extensão do levantamento contavam-se 708 vértices sendo dêstes 165 marcos de cimento.

Foram determinadas as coordenadas rectangulares e as cotas absolutas de todos os vértices da poligonal. O levantamento foi executado tomando como superfície de referência o elipsóide de Hayford e como projecção a conforme de Gauss.

Para garantir por um maior lapso de tempo a utilização de cotas rigorosas na zona coberta pela carta, incluiu-se no nivelamento a colocação e o cálculo da cota de marcas de bronze, de 2.ª classe, de nivelamento de precisão, chumbadas em rocha ou soleira de reconhecida estabilidade.

De Sacavém à Quinta da Chantra contavam-se 44 marcas de bronze, 17 das quais correspondiam ao trôço do Canal agora construído.

4) — Os nivelamentos de apoio, auxiliar, e de execução ou das obras. As referências utilizadas.

Para ter cotas em número suficiente para a execução da obra e que permitissem com um mínimo de perda de tempo e um máximo de rigor determinar a cota para a implantação duma obra, estabelecemos no caderno de encargos que o adjudicatário colocaria, antes de proceder às escavações, ao longo da faixa do Canal e afastados entre si de cêrca de 100 metros, marcos de betão armado como referências para um nivelamento de precisão.

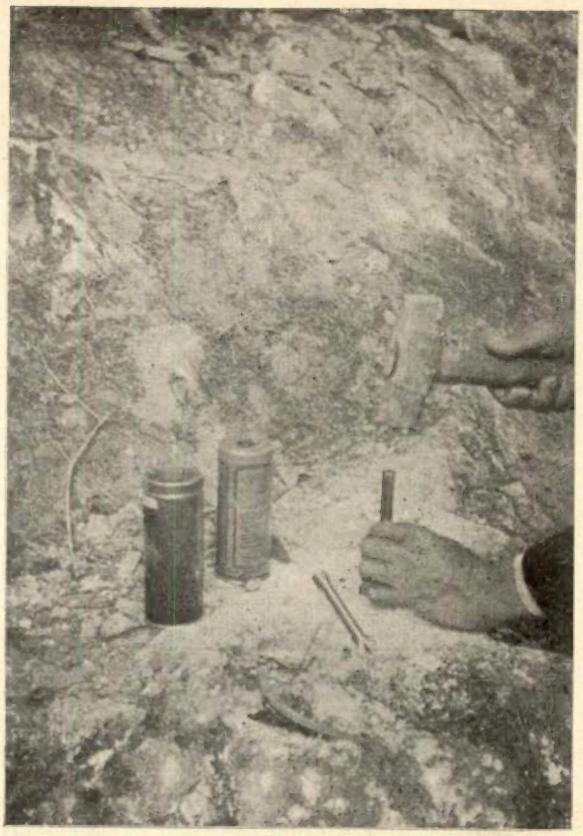


Fig. 1 — Abertura de um furo em rocha para receber uma marca de bronze para nivelamento

O nivelamento efectuado tomando estes marcos como referências é o nivelamento de precisão ou nivelamento de apoio.

Ao prosseguir neste nivelamento seria cómodo ter pontos de conferência do nosso trabalho.

Antes de efectuarmos o nivelamento de precisão referido, colocámos ao longo da linha dos marcos hectométricos, marcas de bronze nas proximidades da obra, que ligámos a marcos da poligonal da carta, por duas operações de nivelamento.

Ao conjunto destas ligações chamamos nivelamento auxiliar.

A verificação das cotas das mestras das

construções, a partir do nivelamento de apoio, efectuadas com nivelamento de precisão, constitui o nivelamento das obras, que adiante se descreverá.

As referências utilizadas foram marcos de betão armado constituídos por um prisma de base quadrada de 12 × 12 cm. com uma sapata de 50 × 50 e com 8 cm. de espessura, e uma altura total de 70 cm. No meio da face superior tinham uma marca de bronze, torneada, à face com a superfície do marco.

O uso desta marca diminui muito a propagação dos erros ao passar de marco para marco. Não a tendo, era preciso que a face do marco fôsse perfeitamente plana e horizontal. Supondo que esta está ligeiramente inclinada e que entre duas arestas opostas há uma diferença de nível de 0,5 cm., nos extremos do diâmetro da marca perpendicular àquelas arestas, a diferença de nível é da ordem do meio milímetro.

Os marcos foram colocados em todos os hectómetros à distância de 4,80 m. do eixo do canal. Em todos os quilómetros e em locais em que convinha assegurar o conhecimento de cotas por largo tempo, na ausência de rocha, era o marco hectométrico substituído por um maciço construído «in loco» de 50 × 50 cm. e com 80 cm. de altura, também armado e com uma marca de bronze ao centro.

Fig. 2 — Sinalizando o lugar onde se ha-de colocar um marco hectométrico

Enquanto um dos outros marcos poderia ser deslocado voluntàriamente, com estes tal facto não se poderia dar. Colocámos em média duas marcas de bronze em cada km. e em especial nas proximidades das passagens de canal a sifão e vice-versa, para poder fàcilmente verificar os marcos, se pequenos movimentos do terreno viessem a dar-se. Próximo de Alhandra deu-se um dêste movimentos; elevou-se o marco, em terreno argiloso, por virtude de sub-pressões e a elevação atingiu 6 cm.

Executou uma das operações do nivelamento de apoio por parte do empreiteiro das obras, o Eng. Manuel Quirino Pacheco de Sousa.

Uma das operações do nivelamento das obras foi efectuada pelo Eng. Virgílio Costa que tinha a seu cargo a construção dos coxins no canal em trincheira, e nos túneis pelo Eng. Augusto Poppe. A outra operação em cada um dos nivelamentos referidos foi efectuada pelo signatário, responsável pela implantação do Canal perante a Companhia das Águas.

5) — O zero utilizado. As linhas de nivelamento de precisão. A ligação dos nivelamentos do Canal à linha de Cascais a Valença

O nível médio do mar em Cascais é o zero de todos os nivelamentos científicos executados no País.

Ao longo das nossas estradas e de algumas linhas férreas executaram os Serviços Geodésicos, desde 1880, alguns milhares de quilómetros de linhas de nivelamento de precisão.

Estas linhas dividem-se em secções e as secções em troços. A extensão dêstes regula por 1 km., e a daquelas por 10 a 20 km.

Os extremos das secções são marcas de bronze de 1.ª classe, e os dos troços marcas de 2.ª classe. Para extremos de secção escolhem-se soleiras de edifícios públicos em localidades de certa importância.

As marcas de 2.ª classe são cilindros de

Fig. 3 — Um marco quilométrico construido com a marca de bronze

bronze fundido com 10 mm. de diâmetro, 10 cm. no sentido do eixo e um alargamento ou cabeça, torneada com 15 mm. de diâmetro e 15 mm. de comprimento, segundo o eixo do cilindro; pesam cêrca de 70 gr. O cilindro é introduzido verticalmente num furo aberto a escopro e maceta em soleira ou rocha, chumbado a frio, ou cimentado, ficando a superfície da marca à face com a pedra.

As marcas de 1.ª classe são cilindros de bronze fundido de 10 cm. de comprimento e 3 cm. de diâmetro, terminando num dos extremos por uma chapa quadrada do mesmo metal, de 8 cm. de lado, e 6 mm. de espessura, pesando 1 kg. A chapa tem gravadas as letras N. P. e por baixo o número de ordem.

Próximo da marca de 1.ª classe e noutras pedras ou soleiras, mas em local onde possa estacionar verticalmente a mira com 3,1 m. de altura, e que se possam vizar da mesma estação de nível em que se visa a mira sôbre a marca de 1.ª classe, colocam-se algumas (2 ou 3) marcas de 2.ª classe, que se denominam testemunhas. A constância da diferença de nível entre o NP e aquelas marcas, testemunha a firmeza da cota atribuída ao NP, ou permite verificar o assentamento da soleira onde esta foi colocada, se êle se deu, por variarem do mesmo número de mm. e no mesmo sentido, as diferenças de nível entre o NP e as marcas de 2.ª classe.

A linha de Cascais a Valença do Nivelamento Geral do País, segue a estrada de Lisboa ao Carregado.

A marca NP 5, início da 5.ª secção: Alhandra a Alenquer, desta linha, foi a escolhida para marca de partida para o nivelamento do Canal. Esta marca está situada na soleira do gradeamento da antiga ermida da Senhora da Guia na Rua Salvador Marques, em Alhandra, actualmente sede da junta de freguesia civil.

À partida conferiu-se a marca pelas suas testemunhas.

Temendo que de futuro, obras de urbanização na Rua Salvador Marques, inutilizassem a soleira onde foi colocada a NP 5, colocámos na propriedade da Companhia, na mesma rua, um marco enterrado de betão armado, construído «in loco», protegido por uma tampa de ferro com uma marca de 1.ª classe $\frac{\text{N1P}}{\text{CAL}}$.

A cota atribuída a NP5 referida ao zero da publicação de «Cotas de Nível» da Direcção dos Trabalhos Geodésicos de 1900, foi 3,513 m.

A cota determinada para a marca de 1.ª classe N1P CAL foi 3,909 m. e a das suas testemunhas: t1 na soleira do pequeno portão de entrada 3,199 m., e t2 na escada para o terraço, no segundo degrau 5,288 m.

Frizamos que o zero a que nos referimos é o da publicação de 1900. O nível médio do mar varia de ano para ano, chegando as diferenças a atingir o decímetro.

O zero da publicação do mesmo organismo, de 1905, é diferente do de 1900. Para passar das cotas da publicação de 1900 para as de 1905 é necessário subtrair-lhes 2 centímetros.

O nivelamento do Canal foi referido ao zero das cotas do livro de 1900 por ser em relação a êste que estavam dadas as cotas das marcas da poligonal da carta à esc. 1:2500.

O nivelamento de apoio foi ligado em Sacavém à nova marca NP4. A antiga marca NP4 estava colocada à cota de 10,90 m. no adro da antiga igreja matriz de Sacavém, que foi aterrado. Em 1933 foi colocada a nova marca, ligada à marca 20 da 3.ª secção, e a uma testemunha da marca antiga. Ficou situada na mesma igreja, mas dentro dela; a igreja é agora o parque de artilharia do G. A. P. 1. A NP4 está junto da porta do lado de poente, dêste lado. A cota da nova NP4 é 11,09 m.

O fecho encontrado entre a média das duas operações e esta cota foi 6 mm. O limite era $2 \text{ mm} \sqrt{20} = \pm 9 \text{ mm}$.

Do lado de montante ligámos à marca 17 CT (da carta do canal do Tejo) na Quinta da Marquesa tendo o fecho sido igual a zero.

As diferenças ou fechos encontrados nas marcas de conferência do nivelamento auxiliar não ultrapassaram 7 mm.

CAPÍTULO II

A execução de nivelamentos de precisão. O zero de referência das cotas

1) — Os erros e enganos a temer

Tratando-se dum nivelamento de precisão, é necessário reduzir ao mínimo as causas de erros sistemáticos e os enganos.

Os erros dizem respeito: ao aparelho, à mira, às referências, às condições do meio e ao observador.

Os enganos são devidos à distracção do operador e podem ser da casa do decímetro ou do metro.

Diremos mais adiante quais os processos empregados para combater as causas de erros sistemáticos e para diminuir a probabilidade dos enganos.

Pela maneira como se organiza o registo das leituras sôbre a mira vê-se que não é possível ter enganos senão de decímetro ou de metro, como adiante se explica.

Os erros devidos ao aparelho dizem respeito ao não paralelismo do eixo óptico da luneta com a directriz do nível e à não coincidência do eixo óptico com o eixo mecânico.

Prova-se geomètricamente que fazendo 4 leituras sôbre uma mira com um nível de óculo utilizando as duas linhas de fé do nível e invertendo o sentido da linha de visão do sistema óptico em relação ao sistema mecânico que lhe serve de suporte, se obtem, da média destas leituras, o valor que corresponde à horizontal do ponto de cruzamento do eixo óptico com o eixo principal do instrumento.

Um notável geodesta português F. A. de Brito Limpo, teve a idéa de associar no mesmo aparelho, dois óculos dispostos paralelamente e com os sentidos de observação opostos.

A idéa da Casa Zeiss de fazer lunetas com a objectiva e a ocular podendo trocar-se, é uma materialização nova da idéa antiga de Brito Limpo.

Verifica-se, no entanto, que a obtenção de 4 leituras será extremamente morosa, quer se utilizem duas lunetas nas leituras, quer se faça a transposição como os modernos aparelhos permitem.

Ora o nível desde que esteja invariàvelmente ligado à luneta, permite dar, ao eixo óptico desta, sempre a mesma inclinação em relação à horizontal. O ângulo daquele eixo numa determinada posição, com a horizontal, subtende, a distâncias iguais, erros iguais.

Compreende-se então que mesmo com um aparelho que não permitisse senão uma única leitura, numa só posição, se poderão obter resultados correctos, desde que em cada estação as distâncias da mira ao aparelho sejam as mesmas, tanto na leitura à frente, como na leitura à retaguarda, pois que os erros iguais e do mesmo sinal se anulam na diferença das leituras.

É essencial, por isso, em nivelamento de precisão, fazer a leitura numa mesma estação com as miras a iguais distâncias.

O porta-mira conta os passos desde a estação à retaguarda até ao aparelho e a partir dêste conta um igual número de passos.

Como nem sempre é possível atender a esta imposição procede-se de modo que, atendendo ao registo das distâncias, se compensem a soma das distâncias à retaguarda e a soma das distâncias à frente, dentro de cada trôço.

Quanto aos erros devidos à mira são de duas origens, devidos às variações de temperatura. ou de humidade (o que se procurou remediar com as miras bi-metálicas e modernamente

com as miras de invar) ; então o metro da mira não vale rigorosamente 1 metro. Adiante nos ocuparemos da correcção para atender a esta causa de êrro sistemático, denominado *equação da mira.*

2) — Sapatas ou triângulos de assento

Os erros relativos às referências extremas de troços combatem-se utilizando marcas ou sinais de bronze com uma superfície plana, sensìvelmente horizontal e o mais lisa possível em soleira da maior estabilidade; para assentar a mira sôbre aquelas, uma peça de bronze terminando por um espigão torneado em calote esférica. Por vezes é a marca que apresenta uma superfície em calote esférica e a peça da base da mira é então plana.

Para obter a diferença de nível entre duas referências fixas situadas a distâncias de ordem das centenas de metros é preciso decompôr o trôço a nivelar, em fracções constituídas por referências provisórias, móveis, que se recolhem logo que deixem de se utilizar.

É necessário, porém, que se mantenha inalterável a cota de tais referências, entre a sua utilização como suporte da mira numa leitura à frente e a sua leitura como suporte da mira à retaguarda.

Usam-se ou estacas de ferro enterradas até à nega, ou, o que é mais expedito, peças triangulares de ferro fundido com 3 pontas de assento que se batem a martelo sôbre o terreno.

A sapata tem uma cavidade *a* para receber o talão, com uma outra menor no centro *b*.

É óbvio que os resultados obtidos são independentes da grandeza do talão, desde que êste seja o mesmo nas leituras à retaguarda e nas leituras à frente; por isso e para evitar complicações no cálculo das diferenças de nível com miras de madeira de equações diferentes, utiliza-se por vezes só uma mira ao contrário da topografia, e dos nivelamentos com miras de invar.

É absolutamente indispensável que a cota da cavidade *a* se mantenha invariável enquanto a mira assenta nela.

O porta-mira coloca a sapata no chão de modo que esta não escorregue, bate-lhe com o pé, e sopra depois o orifício.

Por vezes, em terreno frouxo, firma-se a martelo deixando esperar um pouco para que a sapata tome uma posição de equilíbrio sob a elasticidade do terreno.

Pegando na mira pelas duas pegas, introduz o talão na cavidade *a* da sapata, com as letras voltadas para o nível e dá uma volta completa à mira.

Com esta volta tem-se em vista:

1.°) — Verificar, sendo o terreno fracamente inclinado, se haverá alguma posição da mira para a qual o talão toque na sapata;

2.°) — Fazer escorregar a sapata sob a mira que ainda não está verticalizada, para alguma direcção em que esta tiver tendência a deslocar-se;

3.°) — Fazer caír qualquer pequeno grão de poeira que ainda tivesse ficado entre o botão de bronze do talão e o fundo da cavidade *a*, para dentro da cavidade *b*.

A sapata que serviu a uma estação à retaguarda não se desloca, enquanto não estiver ultimada a estação do aparelho, em que foi lida a mira colocada sôbre essa sapata.

Estes triângulos de assento ou sapatas, são por isso guardados à vista por um dos serventes que vigia a estabilidade da sua posição, até que se ultime a estação do nível, em que se leu a mira sôbre ela. Com efeito pode qual-

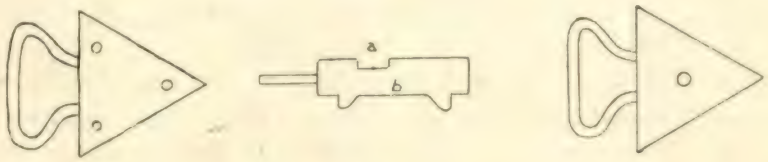


Fig. 4

quer trepidação ter feito deslocar o nível e ser preciso ler novamente a mira na sua posição à retaguarda; se a sapata tivesse sido deslocada, teria que se voltar à marca extrema do trôço anterior.

3) — A constituïção da brigada e o seu funcionamento.

A regra da colocação dos pés do tripé.

A brigada compõe-se normalmente do seguinte pessoal: o operador, que é o engenheiro encarregado do nivelamento, um secretário que faz o registo das leituras e que confere as cadernetas de campo e os outros registos de cálculo de cotas, um porta-mira e dois serventes. Dêstes um destina-se a segurar o chapéu abrigo que deve acompanhar sempre o instrumento furtando-o à acção directa dos raios solares, o outro é o encarregado do transporte do instrumento. Por vezes dispensa-se o secretário no campo, conferindo apenas os registos e cálculos no gabinete. No entanto, a sua existência no campo acelera a operação do nivelamento.

O material é constituído por: instrumento com estojo e tripé; três sapatas (uma de reserva), uma mira, um martelo e a ferramenta para colocação das marcas de bronze guardada em bôlsa de couro que se transporta a tiracolo, (dois escopros, marcas e cimento ou chumbo em tiras) e dois ferros testemunhas.

A brigada funciona da seguinte maneira: o servente do aparelho assim que o entrega ao operador vai para junto do porta-mira que se encontra à retaguarda. Depois de lida esta mira o operador faz sinal ao porta-mira que avança com esta e o martelo, depois de retirar a mira da sapata com cautela para não lhe alterar a cota. Dirige-se então para o operador contando o número de passos e pára junto do aparelho. Aí levanta uma sapata que está no chão junto do tripé e inicia a contagem de igual número de passos, (salvo indicação em contrário do operador), indo postar-se a uma distância do aparelho muito aproximadamente igual, portanto à que tinha na posição anterior.

Coloca a sapata escolhendo o terreno, fora de ervas ou palha sêca, evitando também a proximidade dum tronco de qualquer árvore; firma-a bem com o martelo e coloca a mira que volta para o operador depois de lhe ter dado uma volta completa.

Depois de registar tôdas as leituras, o operador faz sinal ao servente do aparelho, que estava junto da sapata à retaguarda. Êste levanta-a, aproxima-se e entrega-a com a caixa do aparelho ao servente do chapéu-abrigo. Recebe do operador o aparelho e caminhando atrás dêste, leva o aparelho para o novo local designado. Depois de o entregar ao operador colocando-o com a luneta voltada para a mira à retaguarda, recebe do servente do chapéu-abrigo a sapata livre e o estojo do nível; põe êste em lugar abrigado e a sapata a cêrca de 0,80 m. do tripé de forma que o porta-mira a apanhe quando parar ao direito do aparelho e vai para o pé do porta-mira novamente. É o servente do chapéu que transporta a tiracolo a bôlsa da ferramenta.

A produção diária média normal é de 1 km. em linha nivelada duas vezes em sentidos opostos.

Para recomeçar um nivelamento interrompido sôbre um marco hectométrico que por virtude de uma pancada ou algum assentamento pudesse ter variado de cota, costumávamos comparar a diferença de nível com o marco anterior, repetindo assim 100 metros de nivelamento. Por vezes deixávamos em lugar oculto no terreno um ou dois ferros testemunhas—ferros de diâmetro igual a 12 mm. com 50 cm. de comprimento; as diferenças de nível relativas ao marco, asseguravam pela sua constância, a fidelidade da cota do marco em que se ia recomeçar.

Em cada estação deve o tripé do aparelho ser colocado de modo tal que, ficando dois pés paralelamente à linha a nivelar, o outro pé fique ora à esquerda ou à direita dessa linha.

Isto obtem-se automàticamente colocando, sempre que o aparelho ocupa nova estação, a objectiva voltada para a mira que está à retaguarda.

Tem êste procedimento por fim eliminar erros sistemáticos provenientes de reacções desiguais do terreno sob o pêso do operador, principalmente em terrenos de encosta, ou em

Companhia das Águas de Lisboa

NIVELAMENTOS PARA A CONSTRUÇÃO DO CANAL DO TEJO

Linha ..... Secção ..... Troço .....

Data ..... Hora ..... Tempo .....

Obra a nivelar .....

Instrumento ..... Mira ..... Operação .....

Mira na estação anterior					Mira na estação posterior				
Estação da mira	Oculos	Leituras na mira			Estação da mira	Oculos	Leituras na mira		
		Fio I	Fio II	Fio III			Fio I	Fio II	Fio III
	1	m	m	m		1	m	m	m
	»					»			
	2					2			
	»					»			
	S					S			
	¼ S					¼ S			
	1 (m) =					1 (m) =			

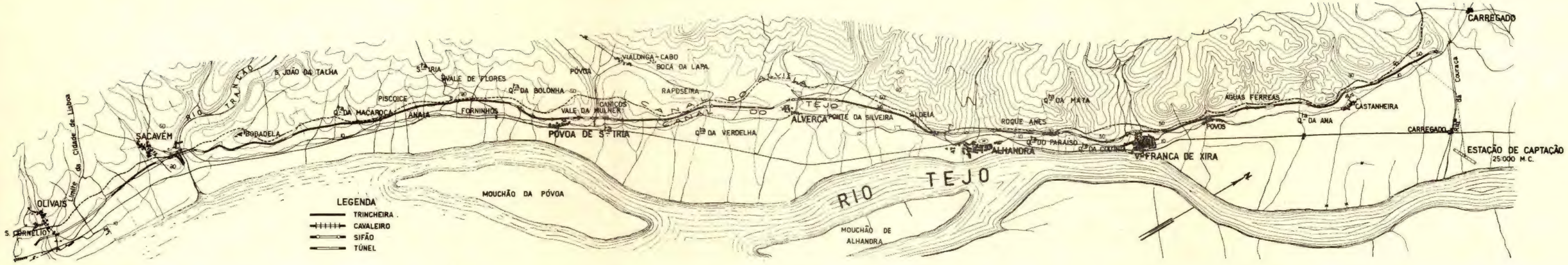
Mira na estação anterior					Mira na estação posterior				
Estação da mira	Oculos	Leituras na mira			Estação da mira	Oculos	Leituras na mira		
		Fio I	Fio II	Fio III			Fio I	Fio II	Fio III
	1	m	m	m		1	m	m	m
	»					»			
	2					2			
	»					»			
	S					S			
	¼ S					¼ S			
	1 (m) =					1 (m) =			

Modêlo 404 — C. A. L.

Conferido .....

Observador .....

TRAÇADO DO CANAL DO TEJO



estradas em que, pela sua reduzida largura, um dos pés do tripé tenha de ficar na faixa de rolagem e os outros dois na berma, ou recìprocamente. A proximidade de árvores em relação ao aparelho deve-se evitar sobretudo em dias de algum vento, pois o movimento dos ramos, transmitindo-se às raízes fortes, pode provocar a trepidação e instabilidade do nível.

4) — As cadernetas para registo de nivelamento de precisão. Os enganos.

Junta-se o modêlo das páginas das cadernetas, análogas às adoptadas pelo Instituto Geográfico e Cadastral, nas suas linhas de nivelamento de precisão do País.

Fazem-se as leituras dos 3 fios do retículo na posição directa do instrumento, (nível à esquerda), e outras 3 na posição inversa (nível à direita), tendo calado a bôlha antes de cada leitura.

É fácil de ver que se o fio do meio coïncide com um milímetro ou meio milímetro exacto, e se as três leituras foram correctas, a soma das duas leituras dos fios extremos é igual ao dôbro da do fio do meio; somando a duas e duas as leituras feitas, as 3 somas são iguais. É esta a verificação das leituras; a que se obtém em cada fio pode variar ligeiramente da posição directa para a posição inversa.

No caso de o fio do meio não coïncidir com um milímetro ou um meio milímetro, e de se apreciarem só os meios milímetros, as três somas diferem no máximo de meio milímetro.

Se as diferenças forem superiores a um milímetro ler-se-á novamente porque o êrro provém, posta de parte a hipótese de má graduação da mira, de uma má interpretação da leitura, ou da vibração da mira motivada pelo vento ou pelo porta-mira.

Com êste processo de leituras e calando bem o nível compreende-se bem que é impossível cometer erros grosseiros ou enganos de centímetros.

Os erros de milímetro que aparecerem no resultado provirão: do assentamento dos marcos enquanto o nivelamento não ligar de marca a marca; de um assentamento do terreno sob a sapata, ou sob o tripé do nível, da vibração daquela, ou ainda da imprecisão na leitura por variação do valor da refracção do ar sob a acção do sol e do vento. Em dias de vento forte não se procede a nivelamentos de precisão, nem às horas de calor, porque o efeito da vibração do ar (tremulina), chega a produzir uma imprecisão de meio centímetro e mesmo mais nas leituras nessas condições. Para precaver contra êste êrro, deve evitar-se a interposição de uma crista de terreno entre o aparelho e a mira.

Eliminada a possibilidade de cometer enganos de centímetro fica ainda a possibilidade de cometer o engano de metro ou o de decímetro. O êrro de metro só aparece em regra na mudança de trainel duma rampa ou declive para um patamar. O êrro de decímetro aparece só quando se faz uma leitura a uma distância muito curta.

Quando a operação inversa tiver de se iniciar logo a seguir à directa, convém alterar de alguns decímetros a cota do nível em relação à mira, se possível fôr para casa de metro diferente.

A existência das cotas de conferência estabelecidas pelo Nivelamento Auxiliar, faria encontrar, ao fechar um trôço, qualquer engano cometido.

No nivelamento geral de um País a conferência duma linha principal faz-se pela sua ligação a vários marégrafos; para as linhas secundárias, pela obrigação de os erros de fecho ao cruzar as principais não excederem a tolerância imposta.

Nos outros casos, só a realização das duas operações efectuadas em sentidos opostos, por operadores diferentes, ou pelo mesmo operador em épocas diferentes, eliminará a possibilidade do êrro grosseiro de metro num trôço; deverá repetir-se o nivelamento, desde que tal tenha sucedido.

Para precaver contra êsse êrro têm-se fabricado miras com graduações nas duas faces, a côres diferentes, tendo as origens descaladas de alguns metros; a diferença não é um múltiplo exacto de decímetros nem de centímetros. Por vezes as duas graduações são na mesma face (Zeiss e Nestler).

Aconselha-se, para diminuir a probabilidade dêsse êrro, fazer a leitura do modo seguinte depois de calada sensìvelmente a bôlha, dando ao porta-mira a voz de «Atenção»: du-

zentos e dezanove, duzentos e trinta e três, duzentos e quarenta e seis, e escrever nas respectivas casas 219, 233 e 246; calar exactamente a bôlha enquanto se dá ao porta-mira a voz de «Firme», e ler então os milímetros e meios milímetros:

quinze zero zero oitenta e cinco
ou
um e meio zero zero oito e meio

Depois da inversão do nível, procede-se anàlogamente e então escreve-se cada leitura na respectiva casa:

21915	23300	24685
24685	23300	21915
46600	46600	46600

Como os aparelhos são estadiados, e em geral a constante estadimétrica é 100, a diferença das leituras extremas expressa em centímetros, dá a distância da mira ao eixo do nível expressa em metros.

Êsse número inscreve-se numa casa da caderneta.

5) — Miras utilizadas

As miras de alta precisão são hoje constituídas por uma fita de invar, com a graduação pintada a traço preto sôbre fundo branco com traços de 0,8 mm. de espessura, distanciados de eixo a eixo meio centímetro e duas graduações separadas de cêrca de um quarto de centímetro com origens diferentes.

Os algarismos são escritos à margem na régua de madeira e a fita é tendida por uma mola sob tensão constante (20 kg.).

Com estas miras convém utilizar sôbre a objectiva do nível uma placa de vidro de faces paralelas, que como adiante veremos permite avaliar os décimos de mm. sôbre a mira, sem estimativa.

As miras de precisão simples são miras de madeira em que a graduação é gravada na madeira por um traço de máquina de dividir, ou com uma pintura celulósica de tal modo cuidada que o traço do retículo, ao caír na separação de dois centímetros não consiga destinguir rebarbas na pintura e não permita por isso indecisão na apreciação da casa em que o fio se encontra. Com as miras de invar evitam-se erros devidos aos efeitos das variações de temperatura e de humidade do ar nas miras de madeira.

A mira utilizada pela casa Waldemar d'Orey era do primeiro tipo, de fabrico Kern. A mira usada por nós era do 2.° tipo, do fabricante Nestler, tipo n.° 345, graduação n.° 57.

Estas miras são sempre providas de nível esférico para a verticalização. A mira é munida de um fio de prumo com um gancho de suspensão e uma referência para rectificar o nível esférico. Isto faz-se colocando a mira na sapata encostada a uma construção ou tronco de árvore em dia calmo e dando pancadas na sapata até calar o prumo.

Obtido isto, rectifica-se pelos respectivos parafusos o nível esférico, levando o centro da bôlha a coincidir com o do círculo de referência.

Cabe aqui indicar como nos apercebemos se uma mira tem o nível desrectificado. Se o defeito obriga, para calar o nível, a colocar a mira fora do plano vertical que contém o eixo óptico do óculo e o espigão da mira, o traço vertical do retículo deixa de bissectar as duas séries de traços da mira.

Se a desrectificação obriga a mira a desvios no sentido do operador, êste aperceberá às pequenas distâncias uma irisação nos bordos dos traços das divisões, nos fios superior e inferior do retículo. Com efeito, sendo as lunetas dos modernos níveis dotadas duma grande precisão na focagem, focando-a para o fio do meio, se a mira não está vertical, as graduações sôbre as quais se projectam os fios extremos estarão, uma mais próxima outra mais afastada do observador em relação ao fio do meio e a desfocagem das respectivas imagens produz aquela irisação.

6) — As cotas absolutas

Vimos como se determinam as diferenças de nível entre marcas colocadas ao longo das linhas de nivelamento de precisão. Para obter o valor das cotas de nível, isto é, das distâncias contadas na vertical desde cada marca à superfície tomada para referência que é a do nível médio do mar, basta determinar êste valor para uma só.

Como a superfície do mar varia de instante

para instante com as pequenas ondas devidas ao vento e com as ondas de maré, é preciso fazer esta determinação, em lugar abrigado das primeiras e procurar a altura média das segundas.

Uma só observação durante um dia, tomando a média das alturas de dois prèamares e do baixamar intermédio ou recìprocamente, dava-nos um valor aproximado e suficiente para um certo número de trabalhos. Existindo porém várias ondas elementares da onda de maré, o resultado assim obtido pode estar muito longe (alguns decímetros) do conveniente para trabalhos de grande precisão.

É preciso então prolongar as observações por algum tempo: denunciam-se assim as ondas semi-mensal, anual, etc. Escolhe-se para isso um sítio do litoral do país, de preferência uma baía abrigada, para aí medir as alturas da maré em relação a uma referência fixa e estável que servirá de base aos nivelamentos do país para a obtenção das cotas absolutas.

A medição faz-se por meio dum aparelho denominado marégrafo. Êste consta essencialmente de um flutuador colocado num poço vertical em comunicação com o mar e ligado por um cabo sempre tenso, a um lápis que se apoia sôbre um papel, enrolado num tambor cilíndrico de eixo horizontal. Um relógio de pêndula comunica um movimento uniforme a êste tambor. Em geral cada fôlha regista as observações durante duas semanas.

No gráfico obtido distinguem-se pequenas irregularidades devidas às pequenas ondas que atingem o poço; a curva média representa a oscilação devida à onda de maré. Determinam-se assim os valores dos dois máximos e dois mínimos diários e calcula-se a média de todos os valores para cada ano. O nível médio assim obtido varia de mês para mês e até de ano para ano, mas estas variações não vão na máxima amplitude além de 15 cm., o que dá uma diferença para o valor médio de 7,5 cm.

Nas publicações do Instituto Geográfico e Cadastral relativas aos Nivelamentos de Precisão de 1898, 1900, 1905, 1906 e 1923, encontram-se dados relativos à variação do nível médio do mar, referido ao último dia do ano, desde 1882 para o marégrafo de Cascais e desde 1908 para o de Lagos. O nível médio relativo às primeiras publicações, difere do da média de todos os valores até 1923 de cêrca de 4 cm.

Sendo as marés produzidas pela atracção conjugada do Sol e da Lua, o período da variação do nível do mar deve ser o do movimento terrestre de *nutação*, que é de 6793 dias ou 18 anos e sete meses e meio.

Convém que as linhas principais de nivelamento de precisão dum país terminem em marégrafos. As diferenças que se supunha existirem entre os níveis dos mares ligados por nivelamentos de precisão, depois de introduzidas as correcções de que adiante tratamos, passaram a ser da ordem dos erros fortuïtos e das diferenças de nível do mar de ano para ano.

Por isso dizia Helmert que às grandes distâncias, nivela melhor o mar, que o mais cuidadoso engenheiro trabalhando com o melhor nível.

7) — Determinação do zero dum nivelamento numa região sujeita a marés

Se pretendêssemos, num local distante das linhas de nivelamento de precisão, obter uma cota com um valor o mais aproximado possível e nos encontrássemos nas proximidades do

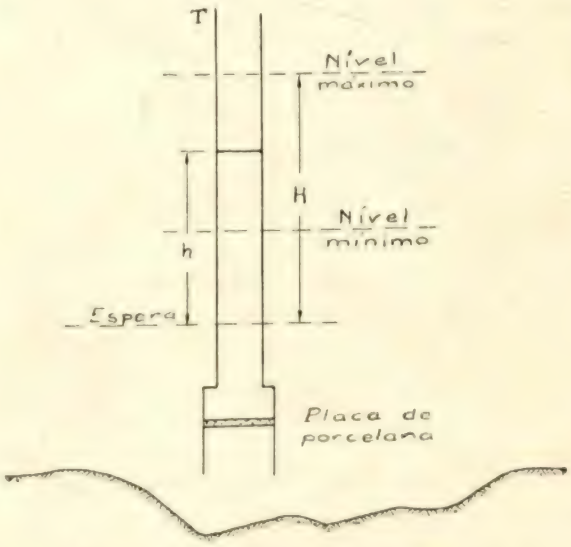


Fig. 5 — Medimarémetro de Lallemand

mar, poderíamos, observando dois preamares e o baixamar intermédio, ou recìprocamente, obter um valor já bastante aproximado do nível médio, como dissemos.

De preferência a uma escala de marés mon-

tariamos um medimarémetro da invenção de Lallemand, cuja teoria se expõe.

Consideremos um tubo T, verticalmente mergulhado na água, com uma altura suficiente para o tôpo superior estar sempre acima das oscilações do nível, e o inferior sempre abaixo.

Obturêmo-lo inferiormente com uma placa permeável de porcelana despolida, por exemplo.

Se designarmos por H as oscilações do nível no meio líquido e por h as que se produzem no interior do tubo; h é sempre menor que H.

Suponhamos que a quantidade de água que passa através da porcelana é em cada instante proporcional à diferença de nível $H - h$, o que é conforme as leis da hidrodinâmica. Como a velocidade da variação de nível é proporcional ao caudal, supondo a secção do tubo constante, teremos para equação diferencial do movimento do líquido no interior do tubo:

$$\frac{dh}{dt} = k\,(H - h)$$

sendo k a constante de proporcionalidade. Ela é dependente da permeabilidade da placa e da relação entre os diâmetros da placa e do interior do tubo.

Se a variação de nível H seguir uma lei sinusoidal de amplitude H_0

$$H = H_0 \text{ sen } \omega t$$

é então

$$\frac{dh}{dt} + kh = h\,H_0 \text{ sen } \omega t$$

Esta equação integrada (ver a sua discussão no livro de Lallemand — «Nivellements de précision», dá:

$$h = h_0 \text{ sen } (\omega t - \varphi)$$

em que φ é a diferença de fase, sendo:

$$\varphi = \text{arc tg } \frac{\omega}{k} \quad \text{e} \quad h_0 = \frac{k\,H_0}{\sqrt{\omega^2 + k^2}}$$

Se a grandeza k se puder desprezar em face de ω, a oscilação no tubo está desfasada de um quarto de período em relação à oscilação exterior, pois que de

$$\text{tang } \varphi = \frac{\omega}{k} = \infty$$

se conclui que é

$$\varphi = \frac{\pi}{2}$$

Na mesma hipótese, tem-se:

$$\frac{h_0}{H_0} = \frac{k}{\omega} = \text{cotg } \varphi$$

e se tang φ fôr muito grande, cotg φ é muito pequena, e então a amplitude dentro do tubo fica notàvelmente reduzida.

Se a variação de nível fôr uma oscilação que se possa representar por uma série de Fourier:

$$H = a \text{ sen } (\omega t - \alpha) + b \text{ sen } (2\,\omega t - \beta) + c \text{ sen } (3\,\omega t - \gamma) + \ldots$$

como no caso das marés, o integral geral da equação do fenómeno é da forma

$$h = a' \text{ sen } (\omega t - \alpha') + b' \text{ sen } (2\,\omega t - \beta') + c' \text{ sen } (3\,\omega t - \gamma') + \ldots$$

Ora como é

$$\frac{a'}{a} = 2 \qquad \frac{b'}{b} = 3 \qquad \frac{c'}{c} = 4 \ldots$$

o amortecimento é tanto maior quanto mais elevada é a ordem do termo da série. Então as oscilações de muito curto período como as das ondas produzidas pelo vento não se propagam para o interior do tubo, e só as das ondas de maré: diária, mensal e anual, etc., se farão sentir.

Bastará então tomar todos os dias em intervalos de 12 horas ou até uma só vez por dia mas às mesmas horas o nível da água dentro do tubo. Para isso usa-se uma sonda que deve ser uma régua metálica graduada com um papel colado que tome uma coloração sob a acção da água, por exemplo, sulfato de ferro e ácido pirogálhico, e se introduz até tocar numa espera dentro do tubo.

Estas operações realizadas durante um mês dar-nos-ão o nível médio referido à espera dentro do tubo, ou ao bordo do medi-marémetro.

É evidente que o aparelho descrito é muito menos caro, quer em estabelecimento, quer em conservação do que um marégrafo. Tem, no entanto, a desvantagem de as suas indicações não ficarem escritas como nêste.

Para obviar a isso aconselha o sr. Lalle-

mand a colar numa fôlha, ao lado uma das outras, as tiras de papel enegrecido para ter um gráfico da variação do nível; mas a construção dêste gráfico, e os cuidados nas tomadas das alturas exigem um empregado mais meticuloso e cuidadoso do que num marégrafo.

Notemos que se assim procedêssemos num estuário dum rio como o do Tejo, e pretendêssemos conhecer o nível médio das águas na Vala do Carregado, teríamos de corrigir o nível médio encontrado para o reduzir ao nível médio de Cascais, base dos nivelamentos do país, da perda de carga devida à corrente do rio. Com efeito, o nível médio das águas é influenciado pelo nível que teria a água corrente, no caso de não existir maré.

No nosso Tejo, regula por 0,0001 a inclinação da superfície das águas. Assim, defronte do Terreiro do Paço já o nível médio deve ultrapassar em cêrca de 0,15 m. o nível médio de Cascais.

Estas mesmas considerações, aplicadas às grandes correntes marítimas, depois de se determinar a secção interessada na vazão e o caudal desta, poderão explicar as diferenças que se notam na ligação de dois marégrafos, depois de no nivelamento de reünião se terem introduzido as correcções devidas aos nivelamentos de alta precisão.

Quando se fala no nível médio do mar, é corrente abstrair-se dêste fenómeno que revela não estarem as águas em equilíbrio, o que é indispensável para definir com rigor a superfície matemática da Terra.

CAPÍTULO III

O nivelamento das obras

1) Trincheiras

Posto de parte por impraticável o processo de nivelar os moldes interiores da construção do tubo, o que obrigaria a uma grande sujeição que era a de ir a cada frente de construção, todos os dias, um operador, cotar um único ponto, e ponderando a inutilidade do excessivo rigor dado por êste processo, recorreu-se, de combinação com o Empreiteiro, à colocação de mestras para conduzir a construção do coxim.

Era desejo do signatário que as mestras fôssem colocadas de 25 em 25 metros. Objectou, porém, o Empreiteiro que lhe parecia não ser necessário colocá-las a menos de 40 ou 50 metros, pois que com o uso dos modernos níveis de água, que supunha utilizáveis por capatazes, constituídos por 2 vasos cilíndricos de vidro reünidos por um tubo de borracha de 25 metros, se obtém uma aproximação de 2 mm. A breve trecho, porém, um êrro de cêrca de 10 cm. que inutilizou mais de 60 m. de coxim, originado provàvelmente pelo mau funcionamento do nível nas mãos de um capataz ou pela introdução de ar no tubo, motivou o pôr-se de parte êste processo, colocando-se então mestras a 20 metros de distância.

As mestras eram constituídas por um paralelipípedo de betão de 40 × 10 × 10 cm., colocado verticalmente, com uma bucha de madeira na face horizontal superior, a uma cota inferior à do Canal de 2 a 3 cm. e envolvido por uma porção de betão para evitar que fôsse derrubado. Na bucha de madeira espetava-se um prego saliente de 4 a 5 cm.

Com o nível de óculo transportava-se a cota das marcas ou marcos de precisão (depois de conferidos estes e de haver a garantia da sua cota, para o que se conferia o marco a utilizar com os consecutivos a montante e a jusante), e batia-se o prego até ficar à cota devida. Primeiro utilizava-se uma escala de aço para medir a descida do prego, quando se tratava de o fazer descer de alguns centímetros; depois para ajustar até cêrca de 2,5 mm. de diferença da cota teórica, verificava-se a cota com a mira e o nível de óculo, a cada pancada do martelo.

A cota da primeira mestra era lida sempre com os 3 fios, e com inversão do nível, para ter a certeza da leitura efectuada e eliminar algum engano que a leitura de um só fio não poderia evitar; a segunda mestra era lida só com um fio, e a terceira, que servia de passagem de cota para mudar o aparelho, era lida novamente com os 3 fios.

É indispensável fazer a inversão do nível; com ela verifica-se se houve esquecimento de calar rigorosamente a bôlha com o parafuso do movimento de báscula. No caso de ter havido esquecimento, as segundas leituras, muito díspares das primeiras, advertir-nos-ão do êrro cometido.

Depois de conferidos os pregos, eram estes aconchegados até acima com betão.

Depois de verificada uma série de mestras, fazia-se a ligação outra vez com os marcos de precisão colocados fora da trincheira no extremo da faixa do Canal.

O limite por nós imposto para o êrro das mestras a partir dos marcos hectométricos foi de $\pm$ 5 mm.

O nivelamento entre mestras, era conduzido pelos capatazes, por meio de réguas guiadas por um cordel de pesca esticado entre duas mestras, não directamente sôbre elas, mas encostado a uma cércea de madeira com o perfil do coxim, e com um traço de serra para definir o eixo. Com um nível de pedreiro guiava-se a posição dos moldes do coxim. Estes tinham 5 metros de comprimento, e por meio de parafusos apoiavam-se em tábuas assentes na terra que permitiam levá-los à sua cota exacta. Introduzia-se assim um êrro devido à flecha do cordel, que, como se vê a seguir, é pequeno; com efeito, um cordel sujeito a uma determinada tensão em dois pontos, toma entre êles, por virtude do seu próprio pêso, a configuração de uma catenária. Quando a flecha é pequena em relação ao vão, pode esta tomar-se, sem êrro sensível, como confundindo-se com uma parábola.

Nestas condições sejam: *a* o vão, *f* a flecha, *t* a tensão a que está sujeito o fio, *p* o pêso por metro linear, tem-se:

$$f = \frac{a^2 p}{8 t}$$

Para

$a = 20$ m.

$t = 5$ kg. — (fôrça de uma mão a puxar)

$p = 0{,}0005$ kg.

vem:

$$f = \frac{20^2 \times 0{,}0005}{8 \times 5} = 0{,}005 \text{ m.}$$

Êste êrro é, como se vê, insignificante.

Depois de construído um trôço do coxim passava-se a verificar os defeitos da construção; transportava-se de novo a cota de marcos exteriores para dentro da trincheira, tomando como ponto de passagem ou de transmissão de cota, os parafusos salientes no coxim, destinados à fixação dos moldes exteriores. Escolhia-se para isso um que apresentasse uma secção lisa, ou rebatia-se com martelo se tinha rebarbas; fazia-se-lhe um sinal a tinta vermelha para o identificar, se tornasse a ser necessário utilizar a sua cota. Escolhia-se de preferência um parafuso situado numa curva para transportar o nivelamento dum alinhamento para outro. As cotas do primeiro ponto do coxim em cada estação, bem como a sua transmissão pelos parafusos, eram calculadas pelas seis leituras já descritas.

Determinada a cota do coxim construído, comparava-se com a cota teórica. Esta calculava-se em função de uma cota inscrita no perfil, juntando ou subtraindo tantas unidades da 4.ª casa decimal, quantas as do número de metros caminhando para montante ou para jusante do ponto cotado no perfil; aparecia o êrro da construção. Calculava-se qual seria a leitura se não houvesse êrro, isto é, a leitura ideal e comparava-se com essa leitura as que se iam fazendo só com o fio do meio, à medida que a mira ia avançando de 5 em 5 metros. Só se tornava a calcular outra leitura ideal, na estação seguinte.

Os desvios não excediam 15 mm. em geral; êste limite achamo-lo muito razoável, dado o carácter grosseiro desta parte da obra.

Não se visava em geral a mais de 40 m. para cada lado duma estação.

Os pregos das mestras, depois de construído o coxim eram assinalados com um círculo de tinta. Verificadas as cotas depois da construção, notava-se um assentamento por efeito do pêso dos moldes, da ordem de 6 a 7 mm.

Quando se encontrava um êrro superior à tolerância, localizava-se com pequenos deslocamentos da mira e sinalizava-se à margem do coxim com dois sinais, a zona a corrigir.

As inscrições nas cadernetas de campo eram dia a dia cobertas a tinta e verificadas no gabinete.

É evidente que a melhor verificação para êste nivelamento, que se pretendia da mais absoluta confiança, consistia na identidade das cotas obtidas para as mestras e para o fundo do coxim, calculadas por duas pessoas diferentes: o engenheiro do adjudicatário que tinha a seu cargo a construção dos coxins, e o signatário, indo buscar as cotas de origem

a marcos de precisão diferentes, e indo terminar o trabalho em marcos ou marcas de precisão, também em geral diferentes.

A conferência da cota do marco de origem dá a certeza da cota utilizada; a ligação a uma cota exterior, ao terminar o trabalho, dá a convicção de se não ter cometido qualquer êrro durante o trabalho.

2) — **Túneis e sifões.**

À entrada de cada túnel era colocado um pequeno marco de cimento, com um prego ao meio, de 10 × 10 cm. e 30 cm. de altura, que ficava enterrado cêrca de 20 cm. e ligado com betão ao terreno depois de bem batido, coberto com uma caixa.

A cota dêsse marco era calculada em função da dos marcos de precisão; tomava-se, depois de cotar êste marco, a cota dum prego metido em betão que servia para guiar a abertura do túnel, colocado na respectiva testa. Êsse prego servia ainda de testemunha ao marco de testa.

Sob os parafusos que recebiam as prumadas e na vertical destas, colocavam-se na soleira do túnel pregos metidos em cimento, com os dois fins seguintes:

a) — Nos túneis em terrenos maus, em que as portadas na ocasião dos tiros podiam sofrer deslocamentos sob o efeito de cargas ou pressões assimétricas do terreno, tinha-se conhecimento dêstes deslocamentos; era então o prego da soleira que servia para guiar a direcção.

b) — Os mesmos pregos, metidos a cotas exactas, serviam para os mineiros conduzirem a sua escavação em altitude.

Com efeito, colocando em cima de dois pregos cruzetas de nivelamento e visando duma cruzeta para a outra, o mineiro chefe do turno indicava a outro mineiro na frente do trabalho, que descia ou subia uma luz de acetilene, quando a luz razava o alinhamento; o homem da luz acompanhava esta com um prego com a ponta encostada ao terreno e espetava o prego à ordem do mineiro chefe.

Conhecendo a altura da cruzeta, determinava-se assim a cota da geratriz inferior da escavação ou a do eixo do túnel.

Com duas luzes, uma em cada prumada, alinhava a outra luz na frente do trabalho.

Colocando no centro da secção de trabalho um cintel metálico, o mineiro verificava se a escavação ia sendo bem conduzida, ou se era necessário escavar ainda mais em qualquer zona.

É evidente que a colocação dos pregos de cota deve ser muito cuidada, e que é erróneo aproximá-los demasiado.

Suponhamos que a sua distância era de 4 metros, e que entre êles havia uma diferença de cota de 2 centímetros. Se o avanço guiado por estes dois pregos se fizer até 40 m., o êrro sistemático de cota na frente, a esta distância, é de 20 cm.

Se com o mesmo êrro, os pregos tiverem sido colocados à distância de 12 metros, o êrro na escavação aos 40 m. era de 6,5 cm.

Devemos notar no entanto, que os colocámos sempre com diferenças relativas inferiores a 0,25 cm., e em geral com diferenças em relação à cota pretendida, da ordem do meio centímetro.

Depois de aberto um túnel eram conferidas por dentro dêle, as cotas dos dois marcos das testas.

O revestimento do túnel era feito colocando as armaduras guiadas por 3 varões de ferro, um sob a geratriz inferior e um de cada lado a 30 cm. daquele. Estes varões eram encostados a pequenos tijoletes de cimento de 15 × 8 × 5 enterrados e presos ao terreno com argamassa funcionando de verdadeiras mestras. A cota dos tijolos correspondentes à geratriz inferior era verificada de 5 em 5 tijolos distanciados, aproximadamente, de 1 metro.

Esta operação corresponde ao verificar o coxim de 5 em 5 metros. A cota atribuída a estas mestras era a mesma que no coxim; subtraía-se à cota do canal 0,150 m. que era a espessura do tubo.

Fazia-se também a leitura numa primeira mestra com os 3 fios; determinava-se o respectivo êrro e a leitura ideal se não houvesse êrro e por ela se conferiam as restantes leituras feitas de cada estação. Tornava-se a ler com os 3 fios para a transmissão de cota.

Usava-se uma lâmpada eléctrica de algibeira para vêr a calagem do nível.

Para ler a mira a luz utilizada era a de uma lâmpada de petróleo com camisa de óxidos metálicos, com a luz encoberta ao observador para não deslumbrar êste.

O túnel de Moscavide tinha 3 poços de extracção de terras, com profundidades de 10 a 20 metros.

Era necessário fornecer cota para o fundo do poço, suficientemente rigorosa para permitir a perfuração do túnel.

Até à borda do poço, que era betonada, trouxe-se o nivelamento de precisão a partir da marca mais próxima dêste, colocando-se um prego no lado de Nascente.

No fundo de cada poço fazia-se uma caldeira de betão para receber a água das infiltrações; na parede desta colocava-se um marco de betão de 15 × 15 com uma marca de bronze, na direcção do prego de cota da borda do poço, e protegido com uma caixa de madeira.

Sôbre o prego da borda do poço colocava-se uma régua metálica de cutelo, tendo no extremo pendente um fio de prumo que descia no poço.

Um mineiro, no fundo do poço, ia dando indicações para se deslocar a régua de modo que o fio de prumo ficasse na vertical da marca.

Quando isto se conseguia, colocava-se um nível de bôlha sôbre a régua, nivelava-se esta calçando o extremo oposto ao fio de prumo, e davam-se os últimos toques na sua posição para que a prumada caísse rigorosamente sôbre a marca.

Quando tal se conseguia, substituía-se o fio de prumo por uma fita de aço que se desenrolava no poço, de modo que um extremo razasse a marca no fundo dêste, e lia-se a graduação em frente da régua metálica.

Como não havia a temer o efeito de correntes de ar, podia ler-se até meio centímetro na fita, com confiança.

É evidente que a cota para o marco do fundo do poço se obteria subtraindo à do prego da borda dêste, o comprimento da fita entre a régua e a marca.

Como a fita podia estar errada, além dos erros fortuitos no nivelamento, teríamos que contar com um êrro sistemático devido à fita. Com efeito, esta não terá 20,000 m. onde êles estão marcados; o que é verdade porém, é que ainda que se cometa um êrro de ± 10 mm. êste êrro sistemático permanece constante durante a perfuração e não se vai acumulando com outros da mesma natureza, crescendo em valor absoluto, como é característico dêstes erros.

O ponto cotado nos sifões era a câmara de chegada do canal com um êrro de ± 5 mm.; os restantes pontos destas obras não necessitam de ser cotados com grande rigor.

Quando se efectuou o nivelamento de precisão, colocou-se na proximidade de cada casa de água, uma marca de bronze com êste fim.

A cota da mestra da casa de água era calculada por nivelamento e contranivelamento, ou a partir da marca e fechando num marco de precisão.

Para que o nivelamento de precisão se não perdesse com o tempo, resolveu-se colocar na laje de manobra das casas de água, em lugar visível do exterior, uma marca de bronze. A todo o tempo ela fornece uma cota rigorosa para quaisquer estudos relativos à vazão do canal, ou a trabalhos nas proximidades que necessitem do conhecimento de cotas de confiança.

Completaram-se até final da obra cêrca de 1900 pg. de cadernetas de conferência de cotas, com 3800 estações de nível.

Para se fazer idéa da precisão e cuidado com que o nivelamento foi conduzido, diremos que as diferenças de nível entre marcos e marcas, quando se fez o Nivelamento de Precisão e quando se utilizaram as respectivas cotas, nas trincheiras em bons terrenos, não ultrapassaram em geral o milímetro.

Tendo-se colocado marcos em tôdas as qualidades de terreno, desde as encostas de rocha até às vertentes margosas de Alhandra e Vila Franca, com grandes inclinações, nem todos os marcos poderiam gozar da mesma estabilidade. Os marcos nalguns sítios caíram e noutros sofreram deslocamentos de alguns centímetros. Notaremos que o volume de terras caídas só em desabamentos, atingiu 10.400 mc.

Prevendo êste mesmo facto havíamos colocado a montante de Alhandra, cêrca de 3 marcas de bronze em cada quilómetro.

(Conclue no próximo número)

Estructura da Luz — Hipótese dos Quanta Métodos de Estatística[1]

POR ANTÓNIO DA SILVEIRA
Prof. de Física Geral e Experimental do I. S. T.

Introdução

1) Sabem que as modificações profundas introduzidas nas nossas concepções mais habituais pela Teoria da Relatividade correspondem à última fase do conflito secular entre a teoria das acções a distância e a teoria das acções de contacto. A teoria das acções de contacto tal como foi desenvolvida por Maxwell e como eu expuz aqui o ano passado repousa sôbre esta ideia: *extensão progressiva das equações locais, válidas no domínio infinitamente pequeno, e estabelecidas no caso do repouso, primeiro aos movimentos estacionários e quási estacionários, e depois aos estados ràpidamente variáveis.* Esta extensão legitimava-se, como sempre, pelo acôrdo das suas conseqüências com os factos.

A teoria de Maxwell foi em seguida depurada pelos trabalhos de Hertz e tomou com êste grande físico um aspecto abstracto muito semelhante ao que caracteriza as teorias da Física moderna; para os corpos em repouso, isótropos, sem magnetismo permanente e não ferromagnéticos, sintetiza-se nêste sistema de quatro eqüações diferenciais:

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \vec{E} &= -\frac{1}{c}\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \\ \operatorname{rot} \vec{H} &= \frac{1}{c}\left(\frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \vec{J}\right). \\ \operatorname{div} \vec{D} &= \rho, \\ \operatorname{div} \vec{B} &= 0, \end{aligned} \tag{1}$$

a que é preciso juntar as três eqüações de definição

$$\vec{D} = \varkappa \vec{E}, \quad \vec{B} = \mu \vec{H}, \quad \vec{J} = \sigma \vec{E} \tag{2}$$

e a expressão da densidade de energia

$$u = \frac{1}{2}\left(\vec{D} \mid \vec{E} + \vec{B} \mid \vec{H}\right)^{(2)}. \tag{3}$$

---

(1) É o título do curso que eu fiz êste ano no Instituto Superior Técnico de 24 de Janeiro a 22 de Fevereiro, e esta publicação reproduz fielmente, de parte pequenos acrescentos, o que eu disse.

Está previsto para o próximo ano um outro curso sôbre as Estatísticas Quânticas e suas Aplicações que virá completar o dêste ano.

Agradeço em primeiro lugar ao meu colega e amigo dr. Bento Caraça o favor das suas críticas, que tive em conta na correcção das provas, e agradeço em segundo lugar ao meu antigo aluno e amigo Ruy Cambournac a sua colaboração na preparação do original.

As obras que consultei e onde os *tomas* por vezes foram literais encontram-se reünidas no fim da publicação.

(2) As unidades adoptadas nêste curso são as do sistema racional de Lorentz.

$\vec{E}$ designa o campo eléctrico, $\vec{H}$ o campo magnético, $\vec{D}$ o deslocamento eléctrico, $\vec{B}$ a indução magnética, $\vec{J}$ a densidade de corrente, ρ a densidade de carga, $\varkappa$ a constante dieléctrica, μ a permeabilidade magnética e σ a conductividade.

Estas eqüações contêm a essência dum grande número de factos experimentais do domínio do electromagnetismo e da ótica pròpriamente dita. Mas a teoria de Maxwell-Hertz não conseguiu explicar satisfatòriamente as reacções entre a matéria e o radiamento, descrever por exemplo a emissão e absorpção do radiamento pelos corpos materiais, o fenómeno da dispersão, etc.

Para conseguir isto era preciso fazer uma ideia da estructura eléctrica da matéria e da maneira como esta estructura reage sôbre o radiamento electromagnético. Logo que os resultados experimentais do século XIX o permitiram Lorentz constituiu a sua teoria dos electrões que veiu até certo ponto resolver as dificuldades.

A ideia que presidiu à estructuração da teoria de Lorentz foi esta: *as equações de Maxwell-Hertz convenientemente modificadas devem-se aplicar ao electrão.*

Resumamos os postulados da teoria.

1.º) A electricidade é constituída por electrões. O éter enche todo o espaço e é a séde dos fenómenos electromagnéticos. Os electrões movem-se mas o éter é imóvel.

2.º) Não existe outra corrente além da corrente de deslocamento no éter e a corrente de convenção dos electrões.

3.º) Não há magnetismo. A indução magnética identifica-se com o campo magnético do éter.

Estas hipóteses conduzem às equações do campo de Lorentz:

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \vec{E} &= -\frac{1}{c}\frac{\partial H}{\partial t}, \\ \operatorname{rot} \vec{H} &= \frac{1}{c}\left(\frac{\partial E}{\partial t} + \rho \vec{v}\right), \\ \operatorname{div} \vec{E} &= \rho, \\ \operatorname{div} \vec{H} &= 0, \\ u &= \frac{1}{2}(E^2 + H^2). \end{aligned} \tag{4}$$

Segundo Lorentz estas equações deviam ser consideradas válidas mesmo nos domínios em que a definição experimental dos vectores E e H é impossível; por exemplo Lorentz considerava-as exactas tanto num ponto do interior do electrão como num ponto adjacente da sua superfície.

ρ designa aqui a densidade, finita, da electricidade num ponto do interior do electrão e $\vec{v}$ a a velocidade da electricidade no ponto em que a densidade microscópia é ρ.

Esta extensão excedeu em audácia tôdas as que até aí tinham sido feitas; não obstante os sucessos alcançados foram de tal ordem que durante muito tempo a teoria de Lorentz foi considerada como a expressão exacta da realidade.

Se procurarmos transformar as equações (4) rigorosamente verdadeiras para todo o ponto do espaço num sistema de equações locais válidas em todo o domínio infinitamente pequeno, por meio dum cálculo de médias apropriado, devemos ser conduzidos às equações macroscópicas da teoria de Maxwell; somos efectivamente e esta coincidência era necessária a fim de que a teoria de Lorentz fôsse aceitável.

Àquelas cinco equações é preciso juntar ainda, por necessidades futuras, a expressão da densidade de fôrça ponderomotriz:

$$\vec{f} = \rho\left(\vec{E} + \frac{1}{c}\vec{v}\wedge\vec{H}\right), \tag{5}$$

onde a presença de ρ em factor mostra bem que o éter não sofria a acção de nenhuma fôrça.

Esta equação figura geralmente entre os postulados da teoria de Lorentz; mas pode ser obtida utilizando as equações de transformação da fôrça, na dinâmica da relatividade [1], e por tanto não precisa de ser considerada como um postulado à parte. De resto ela deve conduzir de par com as equações do campo (4) ao princípio da conservação da energia.

No éter, onde $\rho = 0$, e só interessa êste caso para o estudo do equilíbrio do radiamento, as equações do campo (4) transformam-se fàcilmente e tomam a forma

$$\begin{aligned} \text{lap}\,\vec{E} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2} &= \text{lor}\,\vec{E} = 0\,, \\ \text{lap}\,\vec{H} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{H}}{\partial t^2} &= \text{lor}\,\vec{H} = 0\,, \end{aligned} \tag{6}$$

que são as bem conhecidas equações de onda de propagação das perturbações electromagnéticas no éter com a velocidade c,

2) É natural que se tenha posto aos meus ouvintes a seguinte questão: ¿que razão tinha Lorentz para continuar a falar do éter e a considerar a sua existência?!...

A razão vem de que as equações do campo electromagnético não satisfazem ao princípio de relatividade da Mecânica newtoniana, quere dizer, que se são válidas num certo sistema de referência deixam de o ser num outro sistema animado em relação ao primeiro dum movimento de translacção rectilíneo e uniforme — pelo menos se admite que para passar do primeiro sistema ao segundo se devem utilizar as fórmulas de transformação de Galileu.

No caso mais simples de dois sistemas (Ox, y, z) e (O'x', y' z') semelhantemente orientados em movimento relativo uniforme de velocidade v na direcção do eixo dos x, estas fórmulas são como sabem

$$\begin{aligned} x' &= x - vt \\ y' &= y \\ z' &= z \\ t' &= t \end{aligned} \qquad \text{ou} \qquad \begin{aligned} x &= x' + vt \\ y &= y' \\ z &= z' \\ t &= t' \end{aligned} \tag{7}$$

se O e O' coincindem na origem dos tempos.

Estas fórmulas definem uma transformação que depende dum único parâmetro v e tôdas as transformações dêste género formam um grupo, nêste sentido que duas transformações sucessivas de velocidades v e v' equivalem a uma transformação única da mesma forma de velocidade

$$v'' = v + v'.$$

Tudo se passava então como se existisse no Universo um certo meio de referência tal que as equações do electromagnetismo seriam válidas em todos os sistemas de eixos ligados a êste meio e sòmente nêles. Pois era a êste meio de referência que Lorentz dava o nome de *éter*.

---

[1] Tolman — Phil. Mag. 21-296 (1911).

Mas mesmo assim, reduzido ao simples papel de referencial cinemático, o conceito do éter, mostrou-se inútil. Com efeito, os fenómenos ópticos e electromagnéticos observados deveriam segundo a teoria de Maxwell-Lorentz ser influenciados pelo movimento do observador em relação ao éter e um físico deveria, fazendo observações sôbre a propagação da luz, poder deduzir a sua velocidade em relação ao éter.

Ora, o físico que expérimenta no seu laboratório é sempre arrastado com uma grande velocidade pelo movimento da Terra em tôrno do Sol, e a sua velocidade muda completamente de direcção duma época para outra do ano. Portanto se por um acaso inverosimil se achasse numa certa época do ano em repouso em relação ao éter, alguns mêses mais tarde achar-se-ia em movimeuto muito rápido em relação a êle. Por experiências feitas no decorrer do ano deveria pois ser-lhe possível pôr em evidência o seu movimento em relação ao éter. Simplesmente tôdas as experiências, de resto extremamente precisas, feitas no dominio da óptica e do electromagnetismo por Michelson-Morley, Trouton-Noble, etc. deram um resultado negativo!...

Numerosas foram então as tentativas feitas para conciliar os resultados negativos destas experiências com as teorias existêntes. Isso não foi possível.

E foi Einstein, como sabem, que aos 25 anos achou a verdadeira solução do problema, mostrando de resto que o resultado negativo era perfeitamente natural.

A razão profunda pela qual a teoria electromagnética de Maxwel-Lorentz parecia implicar a possibilidade de se poder pôr em evidência, por medidas ópticas ou electromagnéticas, o movimento de translacção uniforme dum observador em relação ao *éter*, é porque se admitia «a priori» que na passagem dum sistema de coordenadas para outro animado em relação ao primeiro dum movimento de translacção rectilínio e uniforme, as coordenadas dos dois sistemas deviam estar ligadas pelas fórmulas de transformação do grupo de Galileu.

O facto é que as equações de campo de Lorentz não são invariantes numa transformação de Galileu e daqui resultava a possibilidade prevista, mas não confirmada pelos factos, de se poder pôr em evidência o movimento da terra em relação ao éter. Mas o estudo matemático das equações do campo electromagnético mostrou a Lorentz que se as suas equações não são invariantes numa transformação de Galileu, são-no pelo contrário numa outra transformação de coordenadas também linear, mas um pouco mais complicada, que se chama hoje transformação de Lorentz.

Sempre no caso simples de dois sistemas semelhantemente orientados coincidentes na origem dos tempos e em movimento relativo uniforme de velocidade v na direcção do eixo dos x as fórmulas de transformação de Lorentz são:

$$\begin{aligned} x' &= \frac{x - vt}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \\ y' &= y \\ z' &= z \\ t' &= \frac{t - \frac{vx}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \end{aligned} \qquad \text{ou} \qquad \begin{aligned} x &= \frac{x' + vt'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \\ y &= y' \\ z &= z' \\ t &= \frac{t' + \frac{vx'}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \end{aligned} \qquad (8)$$

Estas transformações formam ainda um grupo pois duas transformações sucessivas de velocidades v e v' equivalem a uma transformação única da mesma forma de velocidade

$$v'' = \frac{v + v'}{1 + \frac{vv'}{c^2}} \, . \qquad (9)$$

A transformação de Galileu (7) é de resto a forma limite da de Lorentz quando se supõe nesta última que a velocidade c devém infinita. A velocidade c da luz no vácuo representa pois nesta nova cinemática o mesmo papel que a velocidade infinita na cinemática ordinária.

As fórmulas de transformação do grupo de Lorentz possuem ainda a propriedade de manter invariante a expressão

$$s^2 = x^2 + y^2 + z^2 - c^2t^2 \quad . \qquad (10)$$

Êste invariante representa na teoria da relatividade um papel análogo ao da distância entre dois pontos da Geometria.

Podemos considerar como característica das fórmulas de transformação do grupo de Lorentz o facto de conservarem invariantes as equações de propagação das ondas e o intervalo de universo de dois acontecimentos. Como as equações de onda são invariantes numa transformação de Lorentz, os fenómenos óticos e electromagnéticos são rigorosamente os mesmos para dois observadores em movimento relativo uniforme; donde resulta que é impossível um dêstes fenómenos permitir a um observador pôr em evidência o seu movimento absoluto em relação ao suposto éter.

O resultado negativo das experiências de Michelson Morley, Trouton-Noble, etc., é então perfeitamente natural.

Inversamente, se se postula como um princípio a relatividade de todos os fenómenos óticos e electromagnéticos, no mesmo sentido em que a Mecânica newtoniana postulava a relatividade dos fenómenos mecânicos, é necessário admitir que é a transformação do grupo de Lorentz e não a do grupo de Galileu qúe exprime correctamente as relações entre as coordenadas de dois observadores em movimento relativo uniforme.

3) A teoria de Maxwell-Lorentz atribui à luz uma estructura electromagnética que é impossível alienar: a passagem duma onda electromagnética monocromática por um ponto do espaço corresponde à passagem por êsse ponto dum campo eléctrico e dum campo magnético oscilantes, em fase, situados no plano tangente à onda, perpendiculares entre si e representando energias iguais por unidade de volume.

Sem falar mesmo da teoria quântica do campo electromagnético de Born e Infeld, a mais recente, que ainda um dia possìvelmente aqui será exposta, a teoria de Maxwell-Lorentz constituía há trinta anos, e constitui ainda hoje, a síntese mais completa dos factos relativos à luz.

Mas de então para cá descobriram-se fenómenos que revelaram para a luz uma estructura muito diferente da duma onda electromagnética.

O primeiro dêsses fenómenos, apresentado aqui o ano passado pelo dr. Valadares, foi o efeito foto-eléctrico, cuja característica essencial era esta: uma radiação de freqüência ν parecia só poder ceder a sua energia à matéria por quantidades finitas de grandeza proporcional à freqüência.

Mais uma vez o subversivo Einstein, numa intuïção tão genial como a que o conduziu a enunciar o princípio da relatividade, viu nêste facto experimental a necessidade de voltar, numa certa medida, a uma concepção corpuscular newtoniana da luz, e admitir que um radiamento de freqüência ν se acha dividido em grãos de energia

$$E = h\nu \, , \qquad (11)$$

h sendo uma constante universal.

Esta hipótese forneceu-lhe imediatamente a lei experimental do efeito foto-eléctrico que liga a energia cinética dos electrões expulsos e a freqüência da radiação excitadora.

Mas apesar dos sucessos da teoria dos «licht-quanten» ou dos fotões, como se diz hoje, não nos é possível conservar à luz uma estructura puramente corpuscular: a obra de Fresnel-Maxwell não no-lo permite.

Os físicos viram-se então sèriamente embaraçados, porque dum lado, há o conjunto de fenómenos de interferência e difracção que mostram ser a luz formada de ondas, e, por outro lado, há um conjunto doutros fenómenos mais recentemente descobertos que mostram ser a luz formada de corpúsculos.

Sabem que a única maneira de sair da dificuldade consistiu em admitir que o aspecto ondulatório da luz e o seu aspecto corpuscular são dois aspectos complementares duma mesma realidade.

Tal é a síntese que no caso mais geral a mecânica ondulatória de Broglie nos há-de precisar talvez um dia.

Pois com o objectivo, justamente, de preparar um futuro curso sôbre a Mecânica Ondulatória eu vou procurar nestas lições sublinhar a necessidade que se nos impõe de conservar ao radiamento simultâneamente um carácter ondulatório contínuo e um carácter corpuscular discontínuo. Essa necessidade vem-nos por um lado como disse da interpretação dos fenómenos de interferência, difracção, etc. que exigem a continuïdade, ou pelo menos um certo compromisso, uma certa solidariedade, entre os diferentes pontos duma onda, e, por outro lado, não só dos fenómenos foto-eléctrico, de Compton e de Raman, mas ainda e sobretudo do fenómeno das fluctuações do radiamento de que nos ocuparemos na devida altura.

I PARTE

Leis de Stefan—Boltzmann e de Wien

Vou relembrar num certo à vontade, sem me preocupar com questões muito elementares, as leis do radiamento negro.

Todos os corpos, como sabem, devém incandescentes a uma temperatura suficientemente elevada e emitem radiações. Esta propriedade de emitir radiações não é naturalmente exclusiva dos corpos muito quentes; um corpo à temperatura ordinária emita também energia radiante em quantidade considerável, se bem que notàvelmente inferior à energia por êle próprio emitida uma temperatura muito elevada.

Esta emissão de energia não dá de resto origem a um resfriamento do corpo que se acha à temperatura ambiente, porque ela é compensada pela energia radiante emitida pelos corpos adjacentes e por êle próprio absorvida.

Concebamos então um recinto mantido a uma temperatura uniforme T; os corpos materiais contidos nêste recinto emitem e absorvem radiamento e, nêste jôgo, acaba naturalmente por se estabelecer um estado de equilíbrio no qual as trocas de energia entre a matéria e o radiamento se compensam. Kirchoff demonstrou, baseando-se sôbre os princípios fundamentais da termodinâmica, como viram o ano passado no curso do dr. A. Ferreira, que êste estado de equilíbrio é único e corresponde a uma distribuïção espectral perfeitamente determinada do radiamento contido no recinto. Mais, a distribuïção de energia dêste radiamento pelas diferentes regiões do espectro é independente das dimensões ou da forma do recinto, é independente das propriedades particulares dos corpos materiais que êle contém ou que constituem as suas parêdes, e depende ùnicamente da temperatura T do recinto.

A êste radiamento caracteristico da temperatura considerada dá-se correntemente o nome de *radiamento negro* relativo a esta temperatura. Em face dêstes factos poz-se então à Física teórica o problema de saber prever a composição espectral do radiamento negro a uma dada temperatura.

Designando por u a densidade total da energia do radiamento contido no recinto, e por u_ν a densidade de energia relativa ao intervalo ν e $\nu + d\nu$, *tanto na hipótese contínua como na hipótese discontínua,* teremos

$$u = \int_0^\infty u_\nu \, d\nu \, . \tag{12}$$

Admitamos ainda que a distribuïção do radiamento é *isótropa:* na hipótese contínua isto quere dizer que a energia que atravessa num segundo e numa direcção determinada um elemento de superfície dS, normal a esta direcção, é independente desta direcção; ou, na concepção de de Einstein, o número de «licht-quanten», de fotões, que atravessam por segundo o elemento dS é independente da direcção da normal a êste elemento.

A primeira lei que caracteriza a destribuïção da energia é a lei de *Stefan-Boltzman:*

$$u = aT^4 \, , \tag{13}$$

a densidade u *da energia é proporcional à quarta potência da temperatura absoluta.*

A segunda lei, lei de Wien, diz que a *densidade espectral do radiamento, para uma certa freqüência, é proporcional ao produto do cubo da freqüência por uma função do cociente da freqüência pela temperatura:*

$$u_\nu = \nu^3 f\left(\frac{\nu}{T}\right) . \tag{14}$$

A lei de Wien é mais geral do que a lei de Boltzman; com efeito

$$u = \int_0^\infty \nu^3 f\left(\frac{\nu}{T}\right) d\nu = T^4 \int_0^\infty F\left(\frac{\nu}{T}\right) d\left(\frac{\nu}{T}\right),$$

e, fazendo

$$z = \frac{\nu}{T} :$$

$$u = T^4 \int_0^\infty F(z) \, dz \, ,$$

donde

ou

$$u = aT^4 \qquad \text{com} \quad A = \int_0^\infty F(z) \, dz \, .$$

Estas duas leis são formas degeneradas da lei de Planck.

Relação entre a energia e a impulsão

A demonstração da lei de Boltzman está ligada à existência da *pressão de radiação,* que foi prevista teòricamente por Maxwell e Boltzmann, e estabelecida experimentalmente pelos trabalhos de Lebedew, Nichols e Hull no caso da incidência normal, e por Poynting [1] no caso da incidência obliqua.

Êste fenómeno da pressão de radiação traduz simplesmente o facto que o radiamento que se propaga numa direcção determinada transporta não só energia, mas também quantidade de movimento. A uma energia U do radiamento acha-se associada uma quantidade de movimento

$$G = \frac{U}{c} \, . \tag{15}$$

---

[1] Phil. Mag. Vol. IX, p. 169, 1905.

Êste fenómeno da pressão de radiação é o primeiro que nos aparece êste ano e que se deixa interpretar igualmente bem na concepção ondulatória continua e na concepção corpuscular discontinua do radiamento.

Na terminologia de Luiz de Broglie é um fenómeno *neutro*.

Mas, para estabelecermos a lei de Stefan-Boltzman, em vez de considerarmos aquela relação como puramente experimental, vamos mostrar as suas ligações primeiro com a teoria electromagnética e depois com a teoria dos quanta.

Ponto de vista da teoria electromagnética

a) *Conservação da energia*

Consideremos um volume τ do campo electromagnético limitado por uma superfície σ. Seja $\rho d\tau$ a carga contida no elemento de volume $d\tau$ animada duma velocidade de V; esta carga acha-se submetida a uma fôrça ponderomotriz

$$\rho\left(\vec{E}+\frac{1}{c}\vec{V}\wedge\vec{H}\right)d\tau\,, \tag{16}$$

que produz por unidade de tempo o trabalho

$$\rho\vec{E}\,|\,\vec{V}\,d\tau\,,$$

por ser a segunda fôrça constantemente normal à velocidade.

Para o volume total τ temos pois uma potência

$$\frac{dW}{dt}=\int\rho\,\vec{V}\,|\,\vec{E}\,d\tau\,.$$

Substituindo $\rho\vec{V}$ pelo seu valor tirado da equação do campo (4) vem

$$\frac{dW}{dt}=\int c\ \mathrm{rot}\,\vec{H}\,|\,\vec{E}\,d\tau-\int\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}\,|\,\vec{E}\,d\tau\,; \tag{17}$$

mas apoiando-nos sôbre a expressão da divergência dum produto externo e sôbre o teorema do fluxo temos

$$\int(\vec{E}\wedge\vec{H})\,|\,\vec{n}\,d\sigma=\int(\vec{H}\,|\,\mathrm{rot}\,\vec{E}-\vec{E}\,|\,\mathrm{rot}\,\vec{H})\,d\tau\,,$$

de sorte que a equação (17) pode escrever-se

$$\frac{dW}{dt}=-\frac{1}{2}\int\frac{\partial}{\partial t}(E^2+H^2)\,d\tau-c\int(\vec{E}\wedge\vec{H})\,|\,\vec{n}\,d\sigma\,. \tag{18}$$

Esta relação exprime simplesmente a conservação da energia: o trabalho das fôrças electromagnéticas no volume τ, aumentado do fluxo de energia que atravessa a superfície σ, é igual à diminuïção de energia electromagnética do campo.

O vector

$$\vec{P}=c\,(\vec{E}\wedge\vec{H})\,, \tag{19}$$

cujo fluxo através de σ representa a potência radiada é o *vector radiante de Poynting*.

b) *Tensões de Maxwell. Impulsão electromagnética.*

Apoiando-nos mais uma vez sôbre as equações do campo podemos dar uma forma interessante à *densidade de fôrça ponderomotriz* (16).

Substituindo ρ e $\rho\vec{V}$ pelas suas expressões tiradas de (4) podemos escrever

$$\vec{f} = \vec{E}\,\mathrm{div}\,\vec{E} + \mathrm{rot}\,\vec{H} \wedge \vec{H} + \mathrm{rot}\,\vec{E} \wedge \vec{E} - \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}(\vec{E} \wedge \vec{H}).$$

Os três primeiros termos, aos quais podemos somar a quantidade $\vec{H}\,\mathrm{div}\,\vec{H}$ que é nula por $\mathrm{div}\,\vec{H}$ ser nula, correspondem às tensões de Maxwell; o quarto têrmo foi introduzido por Lorentz e àparte o factor $-\frac{1}{c}$ é a derivada em ordem ao tempo do vector de Poynting.

Consideremos para maior simplicidade apenas as componentes x dos vectores; obtemos sem dificuldade.

$$f_x = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x}(E_x^2 - E_y^2 - E_z^2 + H_x^2 - H_y^2 - H_z^2) + \frac{\partial}{\partial y}(E_x E_y + H_x H_y) + \frac{\partial}{\partial z}(E_x E_z + H_x H_z) - \frac{1}{c^2}\frac{\partial P_x}{\partial t}$$

Pondo como o ano passado para as tensões de Maxwell

$$p_{ii} = -\frac{1}{2}(E_i^2 - E_j^2 - E_k^2 + H_i^2 - H_j^2 - H_k^2)$$

$$\text{e} \qquad p_{ij} = -(E_i E_j + H_i H_j), \tag{19}$$

substituindo e integrando para todo o volume, obtemos

$$\int f_i\,dt + \frac{1}{c^2}\int \frac{\partial P_i}{\partial t}\,d\tau = -\iiint\left(\frac{\partial p_{ix}}{\partial x} + \frac{\partial p_{iy}}{\partial y} + \frac{\partial p_{iz}}{\partial z}\right)dx\,dy\,dz$$

Suponhamos o volume τ suficientemente grande para que a superfície σ que o limita não seja atingida por nenhuma perturbação electromagnética no decorrer do tempo em que se produz o fenómeno. As tensões de Maxwell são nulas e fica simplesmente

$$\vec{F}_{mec} = \int \vec{f}\,d\tau = -\frac{1}{c^2}\int \frac{\partial \vec{P}}{\partial t}\,d\tau, \tag{21}$$

os integrais sendo estendidos a todo o espaço.

Foi a analogia desta equação com a equação fundamental da dinâmica

$$\vec{F}_{mec} = \frac{\partial \vec{G}_{mec}}{\partial t} = \int \frac{\partial \vec{g}_{mec}}{\partial t}\,d\tau\ (^1) \tag{22}$$

que conduziu M. Abraham a considerar uma *impulsão electromagnética*

---

(1) É indiferente usar os símbolos *d* ou δ se as cargas não saiem do domínio da integração.

$$\vec{G}_{em} = \frac{1}{c^2} \int \vec{P} \, \partial \tau , \qquad (23)$$

e uma *densidade de impulsão electromagnética*

$$\vec{g}_{em} = \frac{1}{c^2} \vec{P} . \qquad (24)$$

A fôrça ponderomotriz exercida por um campo electromagnético sôbre um sistema de corpos é portanto igual à derivada em ordem ao tempo, com o sinal —, do momento electromagnético:

$$\vec{F}_{em} = - \frac{\partial \vec{G}_{em}}{\partial t} . \qquad (25)$$

A eqüação (21) escreve-se então

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\vec{G}_{mec} + \vec{G}_{em} \right) = 0$$

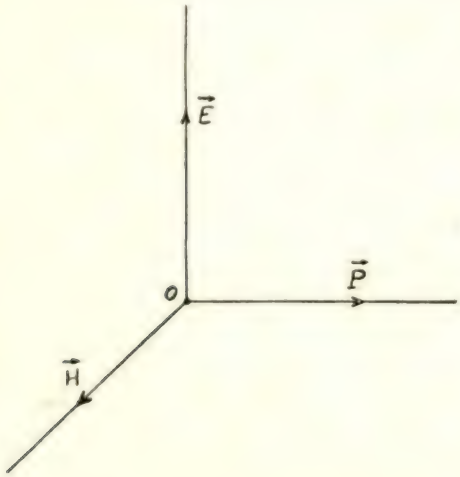
ou

$$\vec{G}_{mec} + \vec{G}_{em} = C^{te} : \qquad (26)$$

a soma das impulsões mecânica e electromagnética, dum sistema isolado, é constante.

c) *Energia e impulsão electromagnética duma onda plana. Pressão de radiação.*

Consideremos uma onda plana, monocromática, polarizada, de freqüência ν, que se propaga ao longo do eixo dos x positivos. Esta onda á caracterizada por um campo eléctrico E e um campo magnético H oscilantes, situados no plano da onda, em fase, perpendiculares entre si e representando energias por unidade de volume:



$$E = E_0 \cos 2\pi \nu \left(t - \frac{x}{c} \right) ,$$

e

$$H = H_0 \cos 2\pi \nu \left(t - \frac{x}{c} \right) .$$

A densidade instantânea de energia é

$$\frac{1}{2} (E^2 + H^2) = E^2 ,$$

e a *densidade média* durante um periodo

$$\frac{E_0^2}{2} = u .$$

A energia total contida num cilindro de base unidade e de altura c será

$$u = \frac{c \, E_0^2}{2} .$$

O vector radiante é normal à onda e dirigido no sentido dos x positivos:

$$P = c E_0^2 \cos^2 2\pi\nu\left(t - \frac{x}{c}\right),$$

e o seu valor médio num periodo

$$P = \frac{c E_0^2}{2}.$$

Verificamos assim que o fluxo de $\vec{P}$ através da base do cilindro, quere dizer, a potência radiada, é numèricamente igual à energia contida num cilindro cuja altura c é percorrida pela onda na unidade de tempo.

A densidade da impulsão electromagnética é

$$\frac{1}{c} E_0^2 \cos^2 2\pi\nu\left(t - \frac{x}{c}\right)$$

e o seu valor médio

$$g = \frac{E_0^2}{2c} = \frac{u}{c}.$$

Se agora calcularmos a impulsão electromagnética contida num cilindro de base unidade e de altura c, obtemos

$$G_{elm} = \frac{E_0^2}{} = \frac{U}{c}, \qquad (27)$$

isto é *a impulsão electromagnética radiada num segundo por uma onda plana é numèricamente igual à energia electromagnética média existente num centímetro cúbico:*

$$G_{elm} = u. \qquad (28)$$

Se a onda incide sôbre uma placa negra em repouso, paralela ao plano de onda, a energia electromagnética transforma-se integralmente em energia de agitação molecular (calôr), e aplicando o princípio da conservação da impulsão total, que atesta ser a impulsão mecânica de translacção G_{mec} comunicada à placa num segundo igual à impulsão electromagnética G_{elm} que sôbre ela chega por segundo, teremos

$$G_{mec} = u. \qquad (29)$$

A placa vai ser então repelida pela onda; mas esta impulsão G, por unidade de tempo, que se exerce sôbre uma superfície unidade, é a fôrça à qual se acha submetido cada centímetro quadrado de placa, quere dizer é a *pressão de radiação.*

Assim se obtém o resultado enunciado por Maxwell: *a pressão de radiação é igual à densidade de energia electromagnética no vácuo, onde se acha a placa.*

Claro que no caso duma superfície perfeitamente reflectora a pressão de radiação deve ser

$$p = 2u.$$

Os casos de incidência oblíqua ou de obsorpção incompleta, com ou sem reflexão, não apresentam dificuldades. Em particular para uma superfície perfeitamente reflectora e uma incidência θ qualquer, a pressão de radiação tem por valor

$$p = 2u \cos^2\theta$$

Êstes resultados valem ùnicamente para o vácuo. Para uma onda propagando-se num meio material obtém-se expressões bastante complicadas.

Ponto de vista da teoria de Einstein

Se passarmos à teoria discontínua em que o radiamento é constituído por corpúsculos, por gôtas de energia que se deslocam com a velocidade da luz, obteremos ainda a mesma relação entre a energia e a quantidade de movimento, mas com uma condição, com a condição de nos colocarmos no ponto de vista relativístico.

Na Mecânica newtoniana tendo em conta apenas a energia cinética, temos para uma partícula de massa m animada da velocidade v

$$E = \frac{1}{2} m v^2 , \quad \text{donde}$$

$$G = m v = \frac{2E}{v} ,$$

e portanto para os quantá de luz, por analogia, teríamos

$$G = \frac{2E}{c} \quad \text{e não} \quad G = \frac{E}{c} .$$

Sabemos porém que a Mecânica newtoniana já não serve quando a velocidade das partículas devém comparável à velocidade da luz; é pois no ponto de vista da dinâmica relativística que nos devemos colocar.

a) *Massa duma partícula em movimento.*

Neste rápido estudo da dinâmica das partículas vamos tomar como postulados de base os dois princípios da conservação da massa e da impulsão que foram estabelecidos empìricamente duma maneira bastante sólida para poderem ser tomados como postulados da Teoria da Relatividade.

De acôrdo com êstes dois princípios, a massa total e a impulsão total dum sistema de partículas interactuantes são constantes:

$$\sum_\alpha m_\alpha = \text{const.} \quad \text{e}$$
$$\sum_\alpha m_\alpha \vec{v}_\alpha = \text{const.} \tag{30}$$

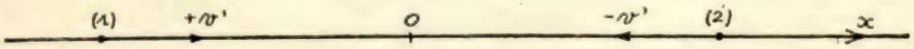
E, de acôrdo com os princípios da relatividade restricta estas equações são válidas em todos os sistemas de coordenadas em movimento relativo uniforme.

O sistema da Mecânica clássica já incluía os princípios da relatividade do movimento, da conservação da massa e da impulsão. Mas entre a Mecânica newtoniana e a Mecânica relativística existe uma diferença essencial; essa diferença reside no facto que as equações de transformação não pertencem ao mesmo grupo.

Na Mecânica newtoniana devemos usar as equações de transformação do grupo de Galileu e então verificamos que é possível satisfazer às equações (30) em todos os sistemas de cordenadas na hipótese que a massa duma partícula seja independente da sua velocidade. Na Mecânica relativística, pelo contrário, devemos usar as equações de transformação do grupo de Lorentz, e então verificamos que só é possível satisfazer aquelas equações na hipótese que a massa duma partícula dependa da sua velocidade.

Para mostrar isto vamos estudar o caso simples dum choque longitudinal entre duas partículas elásticas idênticas (1) e (2) de forma esférica e com massas iguais m_0 em repouso.

Consideremos um primeiro sistema de coordenadas S′ no qual as duas partículas se movem antes do choque com velocidade $+v'$ e $-v'$ sôbre o eixo dos x.



Como por hipótese as duas partículas são perfeitamente idênticas e elásticas, é evidente que elas são primeiro levadas gradualmente ao repouso; em seguida ressaltam sob a acção das fôrças elásticas desenvolvidas, e seguem as mesmas trajectórias, com velocidades respectivamente $-v'$ e $+v'$ da mesma grandeza mas de sentido oposto.

Nêste sistema S′ de coordenadas o choque satisfaz evidentemente às leis de conservação da massa e da quantidade de movimento.

Consideremos agora um segundo sistema de coordenadas S movendo-se relativamente ao primeiro na direcção do eixo dos x com uma velocidade $-V$.

Nêste novo sistema de coordenadas designemos por v_1 e v_2 as velocidades das duas partículas antes do choque, e admitindo já a possibilidade da sua massa depender da velocidade designemos por m_1 e m_2 as massas das duas partículas antes do choque.

Seja ainda M a soma das massas das duas partículas no instante do choque em que elas se acham em repouso relativo, no instante portanto em que ambas se movem com a velocidade $+V$ em relação ao sistema S.

Se os princípios de conservação são válidos no novo sistema S, como pretende o princípio da relatividade, a massa total e a quantidade de movimento total das duas partículas devem ter o mesmo valor antes do choque e no instante de repouso relativo, e então podemos escrever

$$m_1 + m_2 = M, \qquad (31)$$

e

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = MV.$$

Usando as equações de transformação da velocidade podemos exprimir v_1 e v_2 em função dos seus valores $+v'$ e $-v'$ no sistema inicial S′ e obtemos

$$v_1 = \frac{v' + V}{1 + \frac{v'V}{c^2}} \quad \text{e} \quad v_2 = \frac{-v' + V}{1 - \frac{v'V}{c^2}}. \qquad (32)$$

Combinando (32) com (31), obtemos para a relação entre as massas

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{1 + \frac{v'V}{c^2}}{1 - \frac{vV}{c^2}}$$

que por transformações algébricas simples se pode pôr sob a forma

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{\left(1 - \frac{v_2^2}{c^2}\right)^{\frac{1}{2}}}{\left(1 - \frac{v_1^2}{c^2}\right)^{\frac{1}{2}}}.$$

Êste resultado mostra que as massas das duas partículas, que por hipótese têm o mesmo valor quando em repouso, devêm inversamente proporcionais a $\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{\frac{1}{2}}$ quando se movem com a velocidade v, de sorte que podemos escrever

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} . \tag{33}$$

É a relação que pretendíamos estabelecer.

No caso dum choque transverso obtém-se a mesma expressão. [1]

É interessante notar que esta nossa discussão mostra já que devemos atribuir uma massa à energia potencial da deformação elástica.

Com efeito das equações precedentes tiramos

$$M > \frac{2\, m_0}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} , \tag{34}$$

o que mostra ser a massa total das duas partículas, no instante do choque em que elas se acham em repouso relativo, maior do que a massa que seria calculada em função da velocidade V e da soma das suas massas em repouso $2m_0$ antes da deformação.

b) *Trabalho e energia cinética.*

Como a massa duma partícula varia com a velocidade, já não podemos definir a fôrça simultâneamente e indiferentemente pelas relações

$$\vec{F} = m \frac{d\vec{v}}{dt} \quad \text{e}$$

$$\vec{F} = \frac{d}{dt}\left(m\,\vec{v}\right) ,$$

como na Mecânica newtoniana. Há vantagem em adoptar a última definição, pois o princípio da igualdade da acção e da reacção das fôrças devêm idêntico ao princípio da conservação da impulsão, que tomámos como axioma.

Temos então para a fôrça

$$F = \frac{d}{dt}\left(m\,\vec{v}\right) = \frac{d}{dt}\left(\frac{m_0\,\vec{v}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}\right) . \tag{35}$$

Como na Mecânica newtoniana, definimos o trabalho elementar efectuado por uma fôrça $\vec{F}$ constantemente aplicada a uma partícula de posição P, pela eqüação

$$d\,W = \vec{F} \,|\, d\,P .$$

O trabalho assim definido é a primeira forma de energia, e se a partícula é livre podemos

---

[1] Tolman — Phil. Mag. 23, 1912, p. 375.

fàcilmente do trabalho calcular a sua variação de energia cinética em função da variação de velocidade; temos

$$dE = m \frac{d\vec{v}}{dt} \Big| dP + \frac{dm}{dt} \vec{v} \Big| dP ,$$

ou

$$dE = m\, v\, dv + v^2\, dm , \tag{36}$$

e substituindo m pela sua expressão em função da velocidade

$$dE = \frac{m_0\, v}{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{\frac{1}{2}}} dv + \frac{m_0 \frac{v^3}{c^2}}{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{\frac{3}{2}}} dv ,$$

ou

$$dE = \frac{m_0\, v\, dv}{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{\frac{3}{2}}} . \tag{37}$$

Integrando (37) entre 0 e v obtemos a energia cinética total duma partícula de massa em repouso m_0 e que se move com a velocidade v:

$$E = \frac{m_0\, c^2}{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{\frac{1}{2}}} - m_0\, c^2 , \tag{38}$$

que se reduz, no caso de pequenas velocidades comparadas com a velocidade da luz, como era de esperar, à expressão newtoniana

$$E = \frac{1}{2} m_0\, v^2 .$$

c) *Relações entre a massa, a energia e a impulsão*

As expressões de dE e de E podem inscrever-se

$$dE = c^2\, dm \qquad \text{e}$$
$$E = c^2\, (m - m_0) . \tag{39}$$

Tal é a notável relação de proporcionalidade entre a massa e a energia cinética a que nos conduzem os princípios da Relatividade.

Esta proporcionalidade entre a energia cinética e o acréscimo de massa, de par com os princípios gerais de conservação da massa e da energia, sugere imediatamente que a tôda a quantidade de energia, qualquer que seja a sua forma, deve corresponder uma certa massa associada. Vimos de resto (34) que devíamos associar uma massa à energia potencial gerada durante um choque elástico.

Os físicos foram assim conduzidos a postular duma maneira geral que *a tôda a quantidade de energia* E *se acha associada uma massa* m *de grandeza*

$$m = \frac{E}{c^2} , \tag{40}$$

e que *a tôda a massa* m *se acha associada uma energia* E *pela relação inversa*

$$E = mc^2. \tag{41}$$

Finalmente e em conseqüência desta associação da massa e da energia, temos para tôda a quantidade de energia E de velocidade $\vec{v}$ uma quantidade de movimento associada

$$\vec{G} = m\vec{v} = \frac{E}{c^2}\vec{v}. \tag{42}$$

d) *Aplicação aos fotões de Einstein.*

Se agora na equação (42) fazemos tender v para a velocidade c da luz, o segundo membro tende para $\frac{E}{c}$; se considerarmos portanto um fotão de energia $E = h\nu$ devemos admitir que êle transporta uma quantidade de movimento

$$G = \frac{E}{c} = \frac{h\nu}{c}. \tag{43}$$

Mas importa observar que simultâneamente a energia cinética

$$m_0c^2\left(\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} - 1\right)$$

aumenta indefinidamente em relação à energia em repouso $m_0\,c^2$, de sorte que se quisermos conservar ao fotão uma energia finita, de grandesa dada E, devemos considerar nula a sua energia em repouso, na medida em que isto de levar ao repouso um corpúsculo de energia que se desloca com a velocidade da luz tenha um sentido físico.

Um corpúsculo de luz, um fotão, só existe enquanto se desloca com a velocidade c; deixa de existir se a sua velocidade devém inferior a c.

É o que parece dar-se quando um fotão é absorvido por um átomo material. O quantum de luz não se cola ao átomo, como poderia acontecer com os corpúsculos de Newton: é *digerido* pelo átomo, deixa de existir na qualidade de partícula, a sua energia e a sua impulsão sendo transferidos ao átomo absorvente (1).

É evidente que se topa aqui com uma dificuldade: a de representar o corpúsculo de luz; e apesar das tentativas de Luiz de Broglie para conservar ao fotão um resíduo de massa, admitindo que o grupo de ondas que êle lhe associa se desloca com uma velocidade ligeiramente inferior a c, parece que se é conduzido a pôr $m_0 = 0$. (2)

---

(1) No vácuo, ou num meio material (que devemos considerar como vácuo cheio de partículas materiais) um fotão tem sempre a mesma velocidade c, e nisto está a principal diferença entre as teorias einsteiniana e newtoniana da luz.

Na teoria de Einstein o fenómeno da refracção recebe portanto uma explicação inteiramente diferente da que lhe dá Newton; implica a absopção com reemissão dos corpúsculos de luz pelas átomos do meio; isto corresponde à sobreposição das ondas elementares primárias e secundárias da teoria electromagnética.

Mas êstes estudos da interacção da matéria e do radiamento não são do programa dêste ano.

(2) Ver L. de Broglie Ann. de Phys. 1925 e Ondes et Mouvements

Na Mecânica newtoniana $m_0 = 0$ não tem significado nenhum; na Mecânica einsteiniana representa as partículas de energia que se movem com a velocidade da luz.

Somos portanto levados a concluir que a concepção do radiamento que o considera como um transporte de gôtas de energia que se deslocam com a velocidade da luz, pondo de parte a dificuldade de as representar, conserva a relação (15) entre a energia e a impulsão.

O resultado experimental que indicámos deixa-se assim incorporar tanto na teoria contínua como na teoria discontínua.

e) *Fundamento relativístico da relação* $E = h\nu$

Antes de mais nada eu desejava insistir um pouco sôbre a relação $E = h\nu$; é que ela apresenta-se-nos de início duma maneira um pouco arbitrária e encerra mesmo qualquer coisa de paradoxal, no sentido que mais adiante explicarei.

Com efeito, se aceitarmos o caracter dual do radiamento como um facto experimental, põe-se naturalmente a seguinte questão: Porque razão é que a energia dum corpúsculo de luz deve ser proporcional à frequência ν e não ao comprimento de onda λ, ou a uma função mais complicada de ν ou de λ?

Em resposta vou mostrar que aquela relação tem um fundamento relativístico.

Consideremos um trem de ondas planas harmónicas de comprimento de onda λ, frequência ν, propagando-se numa direcção fazendo ângulos α, β, γ com os eixos de coordenadas. A sua equação é da forma

$$\psi = \psi_0 \cos 2\pi \left(\frac{x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma}{\lambda} - \nu t \right), \tag{44}$$

onde ψ é a grandeza vibrante e ψ_0 a sua amplitude.

Introduzindo um *vector de onda* $\vec{K}$ de componentes

$$K_x = \frac{\cos \alpha}{\lambda}, \quad K_y = \frac{\cos \beta}{\lambda}, \quad K_z = \frac{\cos \gamma}{\lambda},$$

(44) devém

$$\psi = \psi_0 \cos 2\pi (x K_x + y K_y + z K_z - \nu t) .$$

$K = \frac{1}{\lambda}$ representa o número de ondas por unidade de comprimento num dado instante.

Ora a fase da vibração

$$\Phi = 2\pi (x K_x + y K_y + z K_z - \nu t)$$

é um invariante da transformação de Lorentz, é um escalar puro quadridimensional, o que de resto fàcilmente se reconhece, dada a sua natureza física. E como as quantidades

$$x, y, z, ct \tag{45}$$

são componentes dum quadrivector, segue-se que as quantidades

$$K_x, K_y, K_z, \frac{\nu}{t} \tag{46}$$

devem tambem ser componentes dum quadrivector, porque só neste caso é que

$$x K_x + y K_y + z K_z - \nu t$$

se transforma da mesma maneira que

$$x^2 + y^2 + z^2 - c^2 t^2$$

quando se passa dum sistema para outro em movimento relativo uniforme.

A fase do trem de ondas é pois caracterizada pelo quadrivector (46).

Como por outro lado

$$G_x, G_y, G_z, \frac{E}{c}$$

são as componentes dum quadrivector (impulsão de universo) que se transforma da mesma maneira que (45), se entre as grandezas corpusculares e as grandezas ondulatórias existir uma relação geral, esta só pode ser

$$\frac{G_x}{K_x} = \frac{G_y}{K_y} = \frac{G_z}{K_z} = \frac{E}{\nu} = h;$$

do contrário essa relação dependeria da escolha do sistema de coordenadas, o que é evidentemente impossível.

Na verdade essa relação, em princípio, deve ser uma função arbitrária dos invariantes

$$K_x^2 + K_y^2 + K_z^2 - \frac{\nu^2}{c^2} \quad \text{e} \quad G_x^2 + G_y^2 + G_z^2 - \frac{E^2}{c^2},$$

mas em virtude das fórmulas de definição

$$\nu = \frac{c}{\lambda} \quad \text{e} \quad G = \frac{E}{c}$$

êstes invariantes são ambos nulos, de sorte que h deve ser uma constante universal.

Einstein podia pois ter previsto teòricamente a relação do *quantum*.

A relação $E = h\nu$ encerra ainda uma dificuldade.

Segundo as concepções clássicas, a energia dum corpúsculo é uma grandeza que tem um valor bem determinado. Pelo contrário, na teoria do radiamento não podemos ter, como é evidente, uma linha espectral estrictamente monocromática; poderemos ter uma banda de freqüências que ocupe um pequeno intervalo espectral, muito pequeno mesmo, como mostrarei mais adiante, mas nunca rigorosamente nulo.

Na relação do *quantum* há pois qualquer coisa de paradoxal, visto que iguala uma quantidade bem definida a uma outra que o não é.

O verdadeiro sentido desta dificuldade foi dado pela Mecânica ondulatória por intermédio do princípio de Heisenberg de que nos ocuparemos para o ano.

Pressão do radiamento isótropo

Consideremos um recinto contendo radiamento de densidade u. Êste radiamento exerce em virtude da sua distribuïção isótropa e da relação (15) sôbre um elemento de parêde suposta parcialmente reflectora e absorvente duma maneira qualquer, uma pressão de radiação

$$p = \frac{u}{3}. \tag{47}$$